

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына
Российской академии наук

На правах рукописи

Скиндерев Сергей Александрович

**Математическое моделирование
аукциона с наведенными заявками
для лабораторных проектных игр**

Специальность 05.13.18 - математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
к.ф.-м.н. Меньшиков И.С.

Москва 2013

Оглавление

Введение.....	5
Глава 1 Проектные игры.....	12
1.1 Определение проектной игры.....	12
1.2 Динамическая проектная игра.....	17
1.2.1 Пример аукциона.....	17
1.2.2 Аукцион с наведенными заявками.....	17
1.3 Применение проектных игр для моделирования экономических ситуаций.....	26
1.3.1 Кооперативная игра.....	26
1.3.2 Сетевой аукцион.....	27
1.3.3 Рынок товаров коллективного пользования.....	30
1.4 Основные результаты главы 1.....	31
Глава 2 Динамические кооперативные игры.....	32
2.1 Общие сведения о кооперативных играх.....	32
2.2 Динамическая кооперативная игра.....	34
2.3 Дополнительные определения и утверждения.....	36
2.3.1 Критерии существования предъядер.....	38
2.3.2 Блокирующие состояния.....	44
2.3.3 Условия согласованности.....	50
2.4 Примеры для игры трех лиц.....	53
2.4.1 Общие сведения об игре трех лиц.....	53
2.4.2 Динамическая игра для кооперативной игры трех лиц.....	55
2.4.3 Аукцион с наведенными заявками для игры трех лиц.....	55
2.4.4 Блокирующие состояния.....	57
2.5 Игры с нулевыми выигрышами малых коалиций.....	58
2.5.1 Вычисление N-ядра.....	62

2.5.2	Алгоритм вычисления N-ядра для игр с нулевыми выигрышами малых коалиций	63
2.5.3	Дополнительные исследования игр с нулевыми играми малых коалиций.....	70
2.6	Метрика в пространстве дележей.....	70
2.7	Основные результаты главы 2	72
Глава 3	Программный комплекс для проведения экспериментов	73
3.1	Предпосылки создания программного комплекса	73
3.2	Требования к реализации	75
3.3	Технология Генератор Проектов.....	77
3.4	Сетевая модель данных	79
3.5	Расширение модели для динамической игры	81
3.6	Серия из последовательных игр	83
3.7	Кратное количество участников.....	83
3.8	Язык описания проектных игр.....	84
3.9	Выходные данные	86
3.10	Производительность и надежность	87
3.11	Основные результаты главы 3	87
Глава 4	Анализ экспериментов	88
4.1	Общий подход к анализу	88
4.1.1	Описание одной игры (элементарная игра)	88
4.1.2	Описание серии игр (сценарий последовательности)	88
4.1.3	Мотивация участников.....	89
4.1.4	Постановка эксперимента.....	89
4.1.5	Извлечение данных для анализа	89
4.1.6	Проблема повторяемости и стационарности	90
4.2	Сравнительный анализ кооперативных игр трех лиц	91
4.2.1	Отличительные особенности аукциона с наведенными заявками и предполагаемое поведение участников.....	92
4.2.2	Описание экспериментов.....	93

4.2.3	Анализ влияния информации о блокирующих стратегиях ...	94
4.2.4	Анализ влияния информации о значениях N-ядер.....	97
4.2.5	Интерпретация результатов.....	102
4.3	Сравнительный анализ игр по сетевому газовому аукциону .	102
4.3.1	Построение проектных игр.....	103
4.3.2	Планирование и проведение серий экспериментов	104
4.3.3	Извлечение данных для анализа	105
4.3.4	Построение гипотезы для пары серий.....	105
4.3.5	Сворачивание случайного вектора в случайную величину	105
4.3.6	Применение критерия согласия Смирнова для проверки гипотезы однородности	106
4.3.7	Интерпретация результата.....	107
4.4	Моделирование рынка программного обеспечения в лаборатории.....	108
4.4.1	Рынок банковского программного обеспечения	108
4.4.2	Аукцион с наведенными заявками.....	110
4.4.3	Особенности игры «BNK»	111
4.4.4	Пробный эксперимент.....	111
4.4.5	Основные эксперименты.....	113
4.5	Основные результаты главы 4	114
	Заключение	116
	Список литературы	120

Введение

Актуальность темы

Экспериментальная экономика – актуальное направление современных междисциплинарных исследований. Методы экспериментальной экономики позволяют в контролируемых условиях лаборатории сконструировать и разыграть социально-экономическую ситуацию и полностью записать все действия участников, которые принимают решения, используя компьютеры, объединенные в сеть.

Значимость этого подхода была отмечена присуждением Нобелевской премии по экономике Вернону Смиту. Он обосновал возможность использования лабораторных рынков как инструмента проверки теоретических гипотез экономического поведения, а также для конструирования новых эффективных рыночных механизмов.

Развитие экспериментальной экономики упирается в необходимость разработки новых математических методов. Потребности экспериментальной экономики порождают неисследованные ранее вопросы и задачи, которые относятся к области теории игр. Такие математические задачи необходимо решать при анализе результатов экспериментов.

Для того чтобы исследовать экономическую ситуацию в лаборатории, требуется сначала построить ее математическую модель. Трудность создания такой модели состоит в том, что она должна охватывать широкий спектр экономических ситуаций и в то же время быть реализованной на основе единого подхода. На базе разработанной модели требуется создать программный комплекс для проведения лабораторных исследований.

К настоящему времени создано некоторое количество таких моделей и соответствующих программных комплексов, однако, остаются существенные пробелы. В частности, не существует общей модели для исследования эко-

номических ситуаций с возможностью кооперации участников. Данная работа в значительной степени решает эту актуальную задачу.

Эффективность предложенного подхода подтверждается совокупностью лабораторных экспериментов, проведенных в Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ и ВЦ РАН.

Обзор литературы

Основоположником экспериментально экономического подхода считается Вернон Смит. Его методология проведения экспериментов и моделирования аукционов опубликованы в работах [14, 17-20]. Другими яркими представителями экспериментально-экономического подхода является группа исследователей под руководством одного из ведущих современных экономистов Чарльза Плотта [2-4].

В современном мире достаточно значимую роль играют энергетические рынки, большинство из которых – в частности, рынки нефти, газа, электроэнергии – характеризуются тем, что наиболее распространенным и экономически целесообразным способом доставки товара от производителя к потребителю является использование транспортных сетей – трубопроводов или линий электропередачи. При этом строительство новых сетей обычно является достаточно сложным процессом, что может существенно ограничивать возможности доставки, а транспортировка товара по сетям сопряжена с затратами.

При организации сетевого рынка одной из главных задач является выбор торгового механизма, наиболее подходящего для данной топологии транспортной сети, структуры собственности, мощностных ограничений и т.д.

Одним из подходов к выбору эффективного торгового механизма для какого-либо экономического рынка является теоретико-игровой. Основным инструментом анализа сетевых рынков является построение различных аукционов. Такой подход применяется, например, в работах [8, 21, 23]. Эти работы посвящены моделированию рынков однородного товара, в частности,

исследуются проблемы расчета конкурентного равновесия для сетевого рынка по заданным функциям спроса и предложения.

Другие работы посвящены исследованию сетевых рынков в лаборатории. В работе [10] в качестве исследуемого в лаборатории метода предлагается закрытый аукцион подачи заявок с диспетчером.

Еще один объект, активно исследуемый в настоящее время – это рынки товаров коллективного пользования. Одной из классических работ в этой области считается работ Элионор Остром [12]. Там рассматривается объект, называемый в зарубежной литературе «public goods», т.е. общественное благо. Основной проблемой на рынках такого рода товаров (мосты, дороги и пр.) является так называемая проблема безбилетника. Это означает, что у пользователей товаров коллективного пользования нет рыночных стимулов тратить ресурсы на производство таких товаров. Так же есть и более современные исследования рынков общественных благ, в том числе и в лабораториях [7, 13].

Альтернативный способ исследования рынков и аукционов является подход кооперативной теории игр [36, 39, 40]. В таком подходе экономическая ситуация представляется в виде характеристической функции. Такой подход достаточно популярен. В работе [33] исследуются характеристические функции, построенные по сетевым рынкам. В работе [25] приводится учет кооперативных взаимодействий в рыночных механизмах.

Наряду с классическим подходом кооперативной теории игр применяются и смешанные подходы. Такой подход можно представить как обратную задачу кооперативной теории игр. Другими словами, по заданной характеристической функции по некоторым правилам строится динамическая игра, которая может быть разыграна в лаборатории. В работах [1, 11] рассматривается пример такого подхода, где в качестве механизма получения дележей кооперативной игры предлагается последовательный аукцион с голосованием.

Основная масса экспериментально-экономических лабораторий находится в США. В России к подобным лабораториям можно отнести таковые в

Московском физико-техническом институте, Высшей школе экономики и Российской экономической школе.

Лаборатория экспериментальной экономики МФТИ и ВЦ РАН (ЛЭЭ) была создана в 2003 году. Она продолжает традиции Лаборатории экспериментальной экономики академии народного хозяйства при Правительстве РФ (с 1991 года). В ЛЭЭ проводится широкий спектр экспериментов: от моделирования рынка электроэнергии РФ до различных международных проектов. Также на базе лаборатории проводится курс «Экспериментальная экономика» для студентов старших курсов ФУПМ МФТИ.

В 2004-2009 гг. в ЛЭЭ проводилась серия экспериментов по моделированию сетевых рынков. Первый исследуемый аукцион использует механизм централизованного сбора заявок участников диспетчером, обладающим заданным функционалом совокупного выигрыша [10]. Второй – торговый механизм, являющийся обобщением непрерывного двойного аукциона на случай сетевой торговли, основанный на использовании производных контрактов. Такой подход основан на модели финансовых рынков [30, 37]. Третий аукцион – это другой вариант сетевого двойного аукциона, основанный на так называемых наведенных заявках [26, 27].

Для первого аукциона использовался программный комплекс «Z-Tree» (Цюрихский Университет, Швейцария). Для второго – программный комплекс «FTS» (Университет Карнеги Меллон, США). «Z-Tree» [5, 6] идеально подходит для моделирования и постановки различных экономических экспериментов в дискретном времени. «FTS» [54] является симулятором финансовой торговой системы, принцип ее работы основан на непрерывном двойном аукционе.

Сетевой аукционный механизм с наведенными заявками по отношению к предыдущим можно назвать компромиссным вариантом, сочетающим в себе прозрачность ценообразования и организованность взаимодействия участников аукциона в реальном времени. Аукцион с наведенными заявками является гибридным механизмом взаимодействия участников лабораторных экспе-

риментов, поэтому каждую из используемых платформ трудно применять для реализации данного аукциона. Одной из целей данной работы было создание программного обеспечения с возможностью использования в лабораториях экспериментальной экономики.

Впервые аукцион с наведенными заявками был предложен как разновидность аукционов для сетевых рынков [26, 27]. Целью данной работы был детальный анализ описанного аукциона, а также обобщение его применимости на другие классы экономических ситуаций, таких как кооперативные игры и рынки товаров коллективного пользования.

Цель работы

- Разработка единой математической модели описания игр нескольких участников, имеющих возможность вступать в кооперацию. Данная концепция должна включать в себя такие известные классы экономических ситуаций, как кооперативные игры, сетевые аукционы и рынки товаров коллективного пользования.
- Построение универсального механизма переговоров между участниками о возможном исходе игры.
- Создание языка для формального описания лабораторной модели игры нескольких участников, имеющих возможность вступать в кооперацию.
- Разработка программного комплекса для проведения лабораторных экспериментов.
- Планирование и проведение серии лабораторных экспериментов с использованием универсального механизма переговоров.
- Исследование особенностей поведения участников лабораторных экспериментов при изменении внешних условий.

Методы исследования

В работе применялись методы теории игр и экспериментальной экономики.

Для разработки программного комплекса использовался инструментальный комплекс «Генератор проектов».

Для проведения экспериментов были использованы методики, разработанные в Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ и ВЦ РАН.

Для анализа результатов экспериментов использовались численные методы математической статистики.

Научная новизна

- Разработана новая математическая модель проектных игр для описания взаимодействия нескольких участников, имеющих возможность вступать в кооперацию. Модель является обобщением таких классов теоретико-игровых объектов, как кооперативные игры, сетевые аукционы и рынки товаров коллективного пользования.
- Создан язык описания проектных игр.
- Аукцион с наведенными заявками для сетевых рынков обобщен на случай произвольной проектной игры.
- Применение аукциона с наведенными заявками (в рамках концепции проектных игр) порождает новый класс динамических игр. Эти игры удалось исследовать как теоретически, так и на основе проведения серий лабораторных экспериментов.
- Для определенного в диссертации класса кооперативных игр получена аналитическая формула для вычисления N -ядра.

Практическая ценность работы

Модель проектных игр, язык описания и программная реализация аукциона с наведенными заявками может быть использована в прикладных исследованиях экономических механизмов методами экспериментальной экономики и теории игр.

Разработанный программный комплекс передан в Лабораторию экспериментальной экономики МФТИ и используется для проведения лаборатор-

ных работ по курсу «Экспериментальная экономика», который читается студентам факультета управления и прикладной математики МФТИ.

Глава 1 Проектные игры

Проектная игра – это математическая модель описания широкого класса экономических ситуаций, в которых участники имеют возможность кооперироваться. В качестве примеров моделей, описываемых с помощью проектной игры, можно привести кооперативную игру, сетевой аукцион и рынок товаров коллективного пользования [47].

Проектная игра – каркас (макет) для построения лабораторной (динамической) игры.

В игре принимают участие n игроков. Каждый игрок управляет множеством своих агентов. Каждый агент может выполнить определенную операцию с заданными затратами. Каждый допустимый проект задается в виде набора операций и дохода от его реализации.

Для реализации проекта необходимо, чтобы в нем участвовал ровно один агент, выполняющий каждую операцию из данного проекта. При этом каждый агент может участвовать не более чем в одном проекте. Доход реализованного проекта распределяется между агентами-участниками. При этом разные агенты, выполняющую одну операцию, конкурируют между собой за право участия в проектах. Возможна одновременная реализация нескольких одинаковых проектов.

1.1 Определение проектной игры

Проектную игру определим на языке множеств индексов. Благодаря такому описанию большинство утверждений, касающихся проектных игр, лаконичнее представляются.

Определение 1.1

Проектной игрой будем называть следующий объект:

$$\Gamma = \left\{ D, M, \left\{ e_i^j \right\}_{i \in D}^{j \in M}, N, A, \left\{ d_l \right\}_{l \in A}, \left\{ n_l \right\}_{l \in A}, \left(c_l \right)_{l \in A}, \left(h^j \right)^{j \in M} \right\}, \text{ где}$$

- $D = \{1, \dots, d\}$ – множество операций;
- $M = \{1, \dots, m\}$ – множество допустимых проектов;
- $\{e_i^j\}_{i \in D}^{j \in M}$ – матрица принадлежности операций к проектам, $e_i^j \in \{0; 1\}$;
- $N = \{1, \dots, n\}$ – множество игроков;
- $A = \{1, \dots, a\}$ – множество агентов;
- $\{d_l\}_{l \in A}$ – разбиение множества агентов по операциям, $d_l \in D$ – операция, которую может выполнить агент l .
- $\{n_l\}_{l \in A}$ – разбиение множества агентов по игрокам, $n_l \in N$ – игрок, которому принадлежит агент l .
- $(c_l)_{l \in A} \in \mathbb{R}^a$ – вектор затрат агентов на проведение операций;
- $(h^j)_{j \in M} \in \mathbb{R}^m$ – вектор доходов от реализации проектов.

Определение 1.1 (окончание)

Фактически множества D, M, N, A содержат индексы соответствующих сущностей. Для обозначения элементов будем использовать следующие индексы: $i \in D, j \in M, k \in N, l \in A$. Матрица $\{e_i^j\}_{i \in D}^{j \in M}$ задает структуру допустимых проектов:

- $D^j = \{i \in D \mid e_i^j = 1\}, j \in M$ – множество операций, входящих в проект j ;
- $M_i = \{j \in M \mid e_i^j = 1\}, i \in D$ – множество проектов, содержащих операцию i ;
- $[D, M] = \{(i, j) \in (D, M) \mid e_i^j = 1\}$ – множество связанных пар «операция-проект»;
- $D_{-i}^j = D^j \setminus i, (i, j) \in [D, M]$ – множество операций, дополняющих операцию i до проекта j .

Разбиение множества агентов по операциям $\{d_l\}_{l \in A}$ означает, что каждый агент может выполнить только одну операцию, причем одну и ту же операцию могут выполнять разные агенты. Разбиение множества агентов по игрокам $\{n_l\}_{l \in A}$ означает, что каждым агентом управляет один игрок, причем один игрок может управлять несколькими агентами.

Пример 1.1

Рассмотрим игру трех участников, каждый из них может не более двух раз выполнить свою операцию (назовем их α , β и γ). Есть один потенциальный проект. Для его реализации необходимо выполнить все три операции. Пусть доход проекта равен 1, а затраты на выполнение операций – нулевые.

Формальное определение будет выглядеть так.

- $D = \{1, 2, 3\}$ – множество операций;
- $M = \{1\}$ – множество проектов;
- $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – матрица принадлежности операций к проектам;
- $N = \{1, 2, 3\}$ – множество игроков;
- $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ – множество агентов;
- $(1, 1, 2, 2, 3, 3)$ – разбиение множества агентов по операциям.
- $(1, 1, 2, 2, 3, 3)$ – разбиение множества агентов по игрокам.
- $\vec{c} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ – вектор затрат агентов на проведение операций;
- $\vec{h} = (100)$ – вектор доходов от реализации проектов.

Пример 1.1 (Окончание)

Определение 1.2

Дележом в проектной игре Γ назовем следующую совокупность объектов $\varphi(\Gamma) = \{R, \{m_s\}_{s \in R}, B, \{r_l\}_{l \in B}, (p_l)_{l \in B}\}$, где

- $R = \{1, \dots, r\}$ – множество реализованных проектов;
- $\{m_s\}_{s \in R}$ – типы реализованных проектов: каждый реализованный проект должен быть допустимым: $\forall s \in R \exists! j \in M : m_s = j$;
- $B \subseteq A$ – множество оперирующих агентов, т.е. агентов, участвующих в дележе;
- $\{r_l\}_{l \in B}$ – распределение оперирующих агентов по реализованным проектам, $r_l \in R$ – проект, в котором участвует агент l ;
- $(p_l)_{l \in B}$ – вектор доходов оперирующих агентов, $p_l \in \mathbb{R}$.

Для реализации проекта необходимо, чтобы каждую операцию данного проекта выполнил один из соответствующих агентов:

$$\forall s \in R \forall i \in D^{m_s} \exists! l \in B : d_l = i \wedge r_l = s.$$

Сумма доходов агентов, реализующих проект, должна равняться доходу проекта: $\sum_{l \in B: r_l = s} p_l = h^s \forall s \in R$. Доход агента должен быть не меньше его затрат

$$p_l \geq c_l \forall l \in B.$$

Определение 1.2 (окончание)

Таким образом, оперирующие агенты делят доход реализованных проектов между собой. *Прибыль* оперирующих агентов – доход минус затраты:

$$u_l = p_l - c_l, l \in B.$$

Дележ, в котором реализовался только один проект, будем называть *единичным дележом* или *сделкой*.

Замечание

Объединение дележей с непересекающимися множествами оперирующих агентов также будет дележом.

Для агентов, не участвующих в проекте положим $r_l = 0, l \in A \setminus B$, а их прибыли будут нулевыми: $u_l = 0, l \in A : r_l = 0$. *Выигрыш* игрока при дележе $\varphi(\Gamma)$ – сумма прибылей всех агентов, управляемых игроком: $U^k = \sum_{l \in A: \eta_l = k} u_l, k \in N$.

Один из возможных дележей для игры из примера 1 – это когда реализовались два (одинаковых) проекта:

- $R = \{1, 2\}$ – множество реализованных проектов,
- $\{m_s\} = (1 \ 1)$ – типы реализованных проектов,
- $B = A$ – все агенты участвуют в дележе,
- $\{r_l\} = (1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2)$ – распределение агентов по реализованным проектам.
- $\bar{p} = (20 \ 20 \ 30 \ 35 \ 50 \ 45)$ – вектор доходов агентов.

Выигрыши игроков при таком дележе, соответственно $U = (40 \ 65 \ 95)$.

Ниже по тексту будет приведен розыгрыш динамического варианта этой игры, который приводит к указанному дележу.

Выделим один важный класс проектных игр. Особый интерес представляют проектные игры, в которых все агенты различны, т.е. выполняют различные операции. В этом случае множества агентов и операций можно считать тождественными.

Определение 1.3

Проектной игрой с различными агентами будем называть игру $\Gamma = \left\{ D, M, \{e_i^j\}_{i \in D}^{j \in M}, N, A, \{d_l\}_{l \in A}, \{n_l\}_{l \in A}, (c_l)_{l \in A}, (h^j)_{j \in M} \right\}$, где множества агентов и операций тождественны $D \equiv A$; $d_l = l, \forall l \in A$.

Определение 1.3 (окончание)

Для проектных игр с различными агентами множество дележей становится более простым. Один и тот же проект не может быть реализован более одного раза, таким образом, множество реализованных проектов является подмножеством допустимых проектов.

Замечание

Произвольную проектную игру можно представить в виде проектной игры с различными агентами.

1.2 Динамическая проектная игра

Для того чтобы из проектной игры получить динамическую, необходимо к исходной модели добавить механизм взаимодействия агентов (управляемых игроками), чтобы они смогли реализовывать проекты и получать прибыль. Главное условие построения динамической игры – это чтобы ее исходы соответствовали дележам проектной игры.

1.2.1 Пример аукциона

В качестве примера можно привести закрытый аукцион с диспетчером (см. [10]). Все игроки одновременно и независимо подают заявки на получение дохода от лица всех своих агентов. Далее диспетчер собирает все заявки и на их основе (максимизируя суммарный доход реализованных проектов) выдает набор реализованных проектов и вектор доходов агентов. И, наконец, игрокам начисляются выигрыши согласно правилам проектной игры.

1.2.2 Аукцион с наведенными заявками

Основой построения аукциона с наведенными заявками [26, 27] служит принцип открытого непрерывного двойного аукциона. Игра проходит в заданном промежутке времени $t \in (0; T)$, в течение которого каждый агент $l \in A$ варьирует свою заявку $p_l(t)$ на получение дохода. Эта заявка означает готов-

ность агента выполнить свою операцию (без уточнения, в рамках какого проекта будет выполнена операция) и получить за это доход не меньше $p_i(t)$. В качестве информации о текущем состоянии игры каждый агент получает встречную (наведенную) заявку $q_i(t)$, которая означает предложение поучаствовать в наиболее выгодном для данного агента проекте. Встречная заявка для агента составляется и вычисляется на основе заявок остальных агентов. В момент, когда заявка некоторого агента l станет равной наведенной, реализуется проект, включающий агента l и всех тех агентов, которые образовали для него наилучшую наведенную заявку. При этом агенты, вступившие в проект, выходят из игры и получают доход, согласно своим заявкам (рис. 1.1).

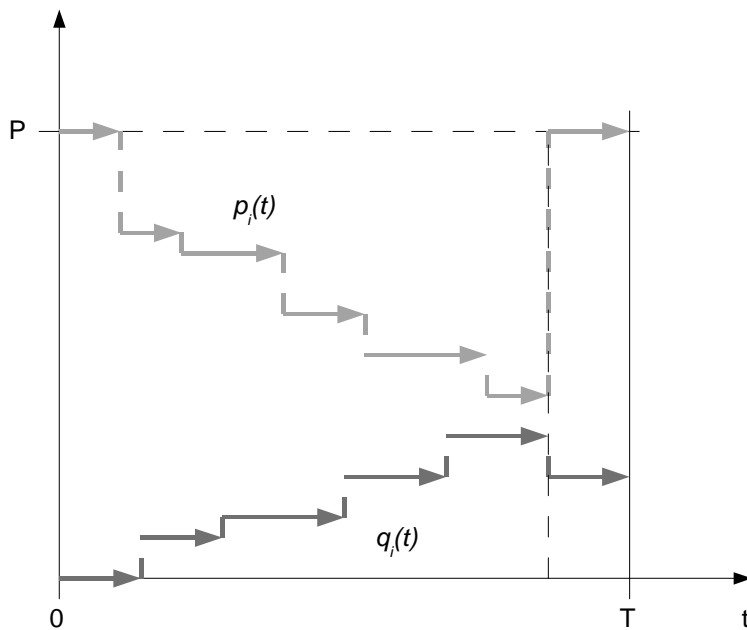


Рис. 1.1 Динамика простой и наведенной заявки

Несмотря на то, что аукцион мы называем непрерывным, удобнее его представить в виде дискретного, с маленьким шагом. Таким образом, будем считать, что все агенты могут подавать заявки только в заданные моменты времени. Если два или более агентов подают заявки в один и тот же момент времени, то они случайным образом упорядочиваются по времени (с дальнейшим дроблением по времени). Множество разрешенных времен подачи

заявок конечно, количество игроков конечно, поэтому полученную игру можно рассматривать как дискретную с большим количеством шагов.

Итак, заявки в игре могут появляться в игре в заданные моменты времени, причем только по одной. Назовем эти моменты *тактами*. Далее под временем будем понимать номер такта.

Теперь о правиле формирования наведенной заявки. Для каждой операции создается *рынок*, состоящий из двух *очередей* заявок: простых и наведенных. Каждый агент $l \in A$ варьирует заявку на рынок своей операции. Отсутствие заявки (в т.ч. в начале игры) можно интерпретировать как заявку с очень большим номиналом: $P > \sum_{j \in M, l \in A} (|h^j|, |c_l|)$. Под *простой* заявкой (от агента) в каждый момент $0 < t < T$ будем понимать пару $\rho_l = (p_l, \tau_l)$, где $c_l < p_l \leq P$ – номинал заявки, $0 \leq \tau_l < t$ – время последнего изменения номинала. Нетрудно заметить, что функции $p_l(t)$ получаются кусочно-постоянными.

Для определения *наведенной* заявки необходимо ввести дополнительные понятия. Фиксируем операцию $i \in D$ и один из проектов, содержащих эту операцию $j \in M_i$. Возьмем по одному агенту, выполняющему операции, дополняющие операцию i до проекта j . Полученное множество назовем множеством *контрагентов* $A_{-i}^j \subset A$, т.е. множеством, удовлетворяющим условиям:

$$\forall x \in D_{-i}^j \exists ! l \in A_{-i}^j : d_l = x,$$

$$\forall l \in A_{-i}^j \exists ! x \in D_{-i}^j : d_l = x.$$

Совокупность множеств контрагентов для каждой связной пары $(i, j) \in [D, M]$ обозначим α_{-i}^j . Можно заметить, что количество множеств контрагентов α_{-i}^j может быть достаточно большим. Но для проектной игры с различными агентами, когда каждую операцию может выполнить только один агент (см. опр. 1.3), все множества α_{-i}^j состоят из одного элемента.

Построим множество контрагентов для проектной игры из примера 1.1. Фиксируем операцию $i=1$, и единственный допустимый проект $j=1$. Тогда

множествами контрагентов будут всевозможные комбинации агентов, выполняющих операции $i = 2, 3$: $\alpha_{-1}^1 = \{\{3;5\}, \{3;6\}, \{4;5\}, \{4;6\}\}$. Для остальных операций аналогично: $\alpha_{-2}^1 = \{\{1;5\}, \{1;6\}, \{2;5\}, \{2;6\}\}$, $\alpha_{-3}^1 = \{\{1;3\}, \{1;4\}, \{2;3\}, \{2;4\}\}$.

Определение 1.4

Наведенной заявкой от множества контрагентов $A_{-i}^j \in \alpha_{-i}^j$ будем называть заявку с номиналом

$$q(A_{-i}^j) = h^j - \sum_{l \in A_{-i}^j} p_l. \quad (1.1)$$

Определение 1.4 (окончание)

Данная заявка означает остаток, который может получить агент за выполнение операции i от реализации допустимого проекта j при условии, что контрагенты получают свой заявленный доход.

Как уже было сказано, наилучшая наведенная заявка для операции $i \in D$ – это наибольшая из всех наведенных. Очевидно, что она должна состоять из простых заявок с минимальным номиналом. Таким образом, номинал наилучшей простой заявки для каждой операции i будет вычислен по формуле: $p_i^* = \min_{l \in A: d_l = i} p_l$. Далее для каждой операции номинал наилучшей наведенной с каждого проекта $j \in M_i$ (содержащего эту операцию) заявки вычисляется по формуле: $q_i^{j*} = h^j - \sum_{x \in D_{-i}^j} p_x^*$. Тогда номинал наилучшей наведенной заявки для каждой операции i будет вычислен по формуле: $q_i^* = \max_{j \in M_i} q_i^{j*}$. И, наконец, номинал наилучшей наведенной заявки для каждого агента $l \in A$ будет:

$$q_l = q_i^*, i \in D: d_l = i. \quad (1.2)$$

Алгоритм определения номинала наилучшей заявки описан. Если агент соглашается с наведенной заявкой, то он вступает в проект, а также в проект вступают все контрагенты, которые образовали для него эту наилучшую заявку. Но возникает проблема однозначного выбора набора контрагентов, в

случае, если несколько наведенных заявок имеют одинаковый номинал. Для этого используется *лексикографическое правило* сравнения наведенных заявок (на основе времен подачи заявок).

Для начала уточним правило сравнения простых заявок. Как уже было упомянуто, лучшей простой заявкой на рынке является заявка, с наименьшим номиналом. Обычно в случае равенства номиналов лучшей считают ту, которая была подана раньше. В нашем случае под временем подачи заявки $\rho_l = (p_l, \tau_l), l \in A$ мы понимаем τ_l – время последнего изменения номинала.

При изменении номинала одной простой заявки может измениться номинал сразу нескольких наведенных. Из-за этого указанный алгоритм сравнения заявок не справляется с задачей детерминированного упорядочивания заявок. Под наведенной заявкой от множества контрагентов $A_{-i}^j \subset A$ будем понимать $\tilde{\rho}(A_{-i}^j) = (q(A_{-i}^j), \tau_{(D^j-1)}, \dots, \tau_{(1)}, 0)$, где $\tau_{(D^j-1)} > \dots > \tau_{(1)}$ – упорядоченные по убыванию времена простых заявок контрагентов, а $q(A_{-i}^j)$ вычисляется по формуле (1.1). Простые заявки, из которых состоит наведенная, будем называть *базой* наведенной заявки. Тогда сравнение наведенных заявок будет осуществляться по следующему лексикографическому правилу. Наведенная заявка с бóльшим номиналом лучше. При равенстве номиналов сравниваем первую пару времен: лучше та, у которой это время меньше. При равенстве очередной пары времен сравниваем следующую и т.д. Если база одной заявки является подмножеством базы другой, то лучшей считает, та, у которой база меньше (при условии равенства номиналов, конечно). Таким образом, на множестве наведенных заявок построено отношение порядка.

Далее сформулируем несколько утверждений, касающихся сравнения наведенных заявок.

Утверждение 1.1

Любая пара наведенных заявок сравнима относительно построенного порядка (построенный порядок является полным).

Доказательство следует из различимости времен любой пары простых и лексикографического правила.

Утверждение 1.2

Если базы двух наведенных заявок отличаются только парой простых заявок, то наведенная заявка, имеющая в своем составе лучшую простую, – лучше.

Утверждение 1.3

Наилучшая наведенная заявка состоит из наилучших простых.

Для описания клирингового механизма необходимо ввести несколько дополнительных понятий.

В процессе торгов важным понятием является *сделка*. Сделка в проектной игре Γ – это дележ $\varphi(\Gamma)$, состоящий из одного реализованного проекта (см. опр. 1.2). Фактически образование сделки означает, что агенты договорились о реализации одного проекта и распределении дохода этого проекта. Один агент может выполнить только один раз свою операцию, поэтому агенты, вступившие в сделку, выходят из игры. Назовем *активными агентами* тех агентов, которые еще не вступили в сделку. Процесс торгов идет в заданном интервале времени, в котором активные агенты могут изменять свои заявки и вступать в сделки. Понятно, что *итоговым дележом* будет объединение всех сделок игры.

Как уже было сказано, отсутствие заявки агента будем интерпретировать как заявку с очень большим номиналом P . Под *состоянием игры* будем понимать совокупность простых заявок всех агентов (необходимо помнить, что под простой заявкой понимается пара номинал и время изменения).

Еще одним важным понятием будет *сделка, согласованная с заявками*. Сделка $\varphi(\Gamma)$ называется согласованной с вектором заявок $\{p_i\}_{i \in A}$, если доход

каждого оперирующего агента не меньше его заявки: $p_l(\varphi) \geq p_l, \forall l \in B(\varphi)$, где $B(\varphi)$ – множество оперирующих агентов, а $p_l(\varphi)$ – их доходы.

Понятно, что такты – это единственные моменты изменения состояний игры. Возможны два случая: либо происходит сделка, и некоторые заявки удовлетворяются (осуществляется клиринг), либо происходит перестроение очередей.

Описание клирингового механизма

Если при подаче агентом l очередной заявки $\rho = (p, \tau)$ на рынок $i = d_l$ во время такта τ выполняется условие:

$$p \leq q_i^*, \quad (1.3)$$

где q_i^* вычисляется по формуле (1.2), тогда происходит сделка, и заявка агента l удовлетворяется по номиналу наведенной заявки, а все те простые, из которых состоит наведенная, удовлетворяются по своим номиналам. При этом удовлетворенные заявки исключаются из очередей, а агенты переходят из множества активных во множество оперирующих.

Иначе (если (1.3) не выполняется) новая заявка добавляется в соответствующую очередь.

В обоих случаях происходит перерасчет наведенных заявок (достаточно посчитать только наилучшие наведенные заявки).

Описание клирингового механизма (окончание)

То, что клиринговый механизм совершает сделку, согласованную с заявками, тривиальный факт. Но тот факт, что в случае, когда клиринговый механизм не совершает сделок, отсутствуют сделки, согласованные с заявками требует более подробного разъяснения. Для этого сформулируем и докажем теорему.

Теорема 1.1

1. *На каждом такте клиринговый механизм совершает сделки тогда и только тогда, когда существуют сделки, согласованные с заявками.*
2. *Если на очередном такте существует несколько сделок, согласованных с заявками, то клиринговый механизм выбирает ту, в которой максимальный доход получает тот агент, который подал свою заявку последним. В случае, когда таких сделок несколько, выбирается та, в которой совокупность контрагентов раньше всех обеспечила возможность такой сделки (раньше всех понимается в смысле лексикографического порядка).*

Теорема 1.1 (окончание)

Первое утверждение эквивалентно утверждению: на каждом такте сделки, согласованные с заявками, существуют тогда и только тогда, когда выполняется неравенство (5). Первая часть второго утверждения говорит, что агент, подавший *закрывающую* заявку, получает максимальный доход. Фактически это означает, что замыкающий агент соглашается с встречной заявкой, которая по определению является наилучшим предложением для данного агента. Вторая часть второго утверждения является обобщением наиболее распространенного правила, что среди заявок с одинаковым номиналом лучшей считается та, которая была подана раньше. Обобщение необходимо, так как подача одной простой заявки может привести к появлению нескольких наведенных. Для пояснения обратимся к проектной игре из примера 1.

Пусть агенты последовательно подают следующие заявки: $\rho_1 = (20, 1)$, $\rho_2 = (20, 2)$, $\rho_3 = (30, 3)$, $\rho_4 = (35, 4)$, $\rho_5 = (50, 5)$, $\rho_6 = (40, 6)$. Тогда во время третьего такта появляются две заявки на рынок $i = 3$: $\tilde{\rho}(\rho_1, \rho_3) = (100 - 20 - 30 = 50; 3, 1)$ и $\tilde{\rho}(\rho_2, \rho_3) = (100 - 20 - 30 = 50; 3, 2)$. И первая наведенная заявка будет лучше второй: $(50; 3, 1) \succ (50; 3, 2)$. В данном случае номиналы наведенных заявок и времена их появления совпадают, и применяется лексикографическое правило

сравнения. Это лексикографическое правило формализует тот факт, что первый агент раньше второго подготовил третьему агенту возможность сделать наведенную заявку, поэтому наведенная заявка, включающая первого агента лучше. На четвертом такте появляются еще две наведенные заявки на рынок $i = 3$: $\tilde{\rho}(\rho_1, \rho_4) = (100 - 20 - 35 = 45; 4, 1)$ и $\tilde{\rho}(\rho_2, \rho_4) = (100 - 20 - 35 = 45; 4, 2)$. И очередь заявок будет следующей: $(50; 3, 1) \succ (50; 3, 2) \succ (45; 4, 1) \succ (45; 4, 2)$. На пятом такте, очевидно, выполняется условие клиринга и должна произойти сделка, но возможны две сделки (согласованные с заявками) с тройками агентов $(1, 3, 5)$ или $(2, 3, 5)$. Клиринговый механизм выбирает первую: реализуется единственный допустимый проект и в нем участвуют агенты $(1, 3, 5)$, а их доходы: $x_1 = 20, x_3 = 30, x_5 = 50$. При этом в очереди наведенных заявок для рынка $i = 3$ остается всего одна заявка: $\tilde{\rho}(\rho_2, \rho_4) = (45; 4, 2)$. И, наконец, на шестом такте подается заявка шестым агентом, но опять возникает целое множество сделок, согласованных с заявками. Это всевозможные сделки агентов 2, 4 и 6, удовлетворяющие условиям: $x_2 \geq 20, x_4 \geq 35, x_6 \geq 40, x_2 + x_4 + x_6 = 100$, но клиринговый механизм выбирает ту, в которой замыкающий (шестой) агент получает максимальный доход: $x_2 = 20, x_4 = 35, x_6 = 45$.

Доказательство теоремы 1.1

Если клиринговый механизм совершает сделку, то эта сделка, по построению, будет согласована с заявками.

Единственным нетривиальным утверждением этой теоремы является тот факт, что если сделка не совершается при очередном ходе, то сделок, согласованных с заявками нет. Доказать это можно по индукции. В начальный момент согласованных сделок естественно нет. Согласованных сделок, не содержащих замыкающего агента, нет т.к. их не было на предыдущем шаге, а появиться от его заявки не могли. Обратное неравенство (5) означает, что наилучшая для замыкающего агента сделка не согласована. А остальные потенциальные сделки замыкающего игрока имеют худшую (либо такую же)

разность между доходом проекта и суммой заявок, т.е. они тоже не согласованы.

Ну и наконец, второе утверждение теоремы является прямым следствием основного правила клирингового механизма (сделка происходит по цене наведенной заявки) и лексикографического правила упорядочивания заявок.

Доказательство теоремы 1.1 (окончание)

1.3 Применение проектных игр для моделирования экономических ситуаций

С помощью модели проектной игры можно описать широкий класс экономических ситуаций. В качестве примеров моделей, описываемых с помощью проектной игры, можно привести кооперативную игру, сетевой аукцион и рынок товаров коллективного пользования.

В этом разделе будут описаны алгоритмы построения проектной игры по заданным экономическим ситуациям.

1.3.1 Кооперативная игра

Рассмотрим кооперативную игру (с трансферабельной полезностью [36, 40]) $G^{coop} = \{N, V\}$, где $N = \{1, \dots, n\}$ – множество игроков, $V: 2^N \rightarrow \mathbb{R}_+$ – характеристическая функция, $V = \{v(S)\}_{S \in 2^N}$, $v(\emptyset) = 0$.

По заданной кооперативной игре проектная игра $\{D^*, M^*, N^*, A^*, \{e_i^j\}_{i \in D^*}^{j \in M^*}, \{d_l\}_{l \in A^*}, \{n_l\}_{l \in A^*}, (c_l)_{l \in A^*}, (h^j)_{j \in M^*}\}$ строится следующим образом. В качестве множеств игроков, агентов и операций берется множество игроков в кооперативной игре: $N^* = A^* = D^* = N$. Множество проектов – это множество всех коалиций с положительным выигрышем: $M^* = \{S \subset N : v(S) > 0\}$. Матрица принадлежности операций к проектам соответствует принадлежности игрокам исходной игры к коалициям:

$e_S^j = \begin{cases} 1, & i \in S \\ 0, & i \notin S \end{cases}, i \in N^*, S \in M^*$. Как уже было сказано, множества игроков, агентов и

операций совпадают: $d_l = n_l = l, l \in A^*$. Затраты на выполнения операций нулевые: $c_l = 0, l \in A^*$. Доходы проектов – выигрыши коалиций: $h^S = v(S), S \in M^*$.

Множество дележей в полученной проектной игре оказывается шире множества дележей в кооперативной игре. Все дележи исходной игры – это дележи проектной игры, в которых реализуется только один проект, соответствующий максимальной коалиции. Выигрыши игроков соответствуют выигрышам в дележах.

1.3.2 Сетевой аукцион

Основой математического представления сетевого аукциона [31, 32] служит граф, в вершинах которого локализованы покупатели и продавцы, а ребра соответствуют транспортировщикам. В дальнейшем будем считать, что граф аукциона является ориентированным, т.е. транспортировка товара по каждому ребру возможна лишь в одном направлении (что не является существенным ограничением, так как возможность двусторонней транспортировки между какими-либо двумя вершинами допускается с помощью двух разнонаправленных ребер). Будем предполагать, что предметом торговли в сетевом аукционе служит однородный штучный товар, т.е. объем сделки на таком рынке должен быть кратным некоторому минимальному объему, а единицы товара, произведенные разными агентами, считаются полностью идентичными.

Введем некоторые обозначения. Пусть $j = 1, \dots, m$ – произвольным образом пронумерованные агенты – продавцы, покупатели и транспортировщики. Обозначим через S множество всех продавцов, T – всех транспортировщиков, B – покупателей. Соответственно, $|S| + |T| + |B| = m$. Все агенты заданным способом разделены по собственникам.

Далее, через F_j будем обозначать максимально возможный объем покупки, поставки или транспортировки, достижимый для агента j . В терминах энергетических рынков эти объемы можно трактовать как мощностные ограничения на добычу (генерацию), максимальную мощность транспортных ма-

гистралей или объем спроса. Мы будем рассматривать только рынки с целочисленными значениям мощностных ограничений.

Предположим, что затраты поставщика или транспортировщика j на единицу k составляют $c_j^k > 0$, а выкупная стоимость покупателя j от единицы k равна $v_j^k > 0$. Можно считать, по выкупной стоимости покупатель реализует товар конечным потребителям. Прибылью продавца (транспортировщика) j в результате заключения сделки по единице k на сетевом рынке мы будем называть разницу $p_j^k - c_j^k$ между ценой продажи p_j^k и затратами на производство (транспортировку) данной единицы. Прибылью покупателя от покупки единицы k назовем разницу $v_j^k - p_j^k$ между стоимостью реализации товара конечным потребителями v_j^k и ценой покупки p_j^k . Общий выигрыш является суммой прибылей по всем сделкам. В случае если агент не заключил ни одной сделки, его выигрыш полагается равным нулю.

Для того чтобы представить сетевой аукцион в виде проектной игры, приведем его в несколько иное представление. Во-первых, преобразуем исходный граф в двухполюсный. Для этого добавим к исходному графу две вершины, источник и сток, а также добавим дуги из источника ко всем вершинам, в которых есть продавцы, и дуги из всех вершин с покупателями ведущие в сток. А также воспользуемся целочисленностью мощностей всех агентов и разобьем их на атомарных, т.е. с единичными мощностями.

Итак, рассмотрим сетевой аукцион на двухполюсном графе $G = (V, E)$. На каждом ребре данного графа находятся три типа агентов $A = A_S \cup A_T \cup A_B$: продавцы, транспортировщики и покупатели. Причем продавцы находятся на ребрах, исходящих из источника, а покупатели – на ребрах, ведущих в сток: расположение агентов задано в виде отображения множества агентов во множество ребер $\{e(l) \in E\}_{l \in A}$. Каждый продавец и транспортировщик $l \in A_S \cup A_T$ может произвести или транспортировать одну единицу товара с затратами $c_l > 0$, а выкупная стоимость покупателя $l \in A_B$ равна $v_l > 0$. И, нако-

нец, есть заданное множество собственников N и отображение множества агентов во множество собственников $\{n(l) \in N\}_{l \in A}$.

По заданному сетевому аукциону проектная игра $\{D^*, M^*, \{e_i^j\}_{i \in D^*}^{j \in M^*}, N^*, A^*, \{d_l^*\}_{l \in A^*}, \{n_l^*\}_{l \in A^*}, (c_l^*)_{l \in A^*}, (h^j)_{j \in M^*}\}$ строится следующим обра-

зом. Множество операций – это множество дуг в двухполюсном графе: $D^* = E$, множество проектов – это всевозможные пути графа, не содержащие циклов, из источника $s \in V$ в сток $t \in V$: $M^* = Path(s, t)$. Матрица принадлежности операций к проектам соответствует принадлежности дуг к маршрутам:

$$e_j^i = \begin{cases} 1, & i \in j \\ 0, & i \notin j \end{cases}, i \in E, j \in Path(s, t).$$

Множество игроков – это множество собственников: $N^* = N$. Множество агентов проектной игры совпадает с множеством атомарных агентов сетевого аукциона: $A^* = A_S \cup A_T \cup A_B$. Распределение агентов по операциям совпадает с расположением агентов на ребрах: $d_l^* = e(l), \forall l \in A$, а распределение агентов по игроку совпадает с распределением по собственникам: $n_l^* = n(l), \forall l \in A$. Затраты продавцов и транспортировщиков остаются неизменными: $c_l^* = c_l > 0, \forall l \in A_S \cup A_T$, а в качестве затрат покупателей берутся их выкупные стоимости со знаком минус: $c_l^* = -v_l < 0, \forall l \in A_B$. Доходы проектов полагаются равными нулю: $h^j = 0, \forall j \in M^*$.

Как видно, в описанном построении есть два неэквивалентных преобразования: это множество проектов и затраты покупателей. Проверим, что такое преобразование сохраняет свойства сетевого аукциона. В сетевом аукционе проект это добыча единицы продукта в некоторой вершине, транспортировка по одному или нескольким ребрам в вершину с покупателем и, наконец, потребление этой единицы в конечной вершине. Но это как раз и есть полный маршрут из источника в сток в двухполюсном графе. Теперь разберемся с ценами и доходами. Возьмем произвольный маршрут $j \in Path(s, t)$, и выберем одного продавца, одного покупателя и по одному транспортировщику из каждой дуги маршрута: $l_s \cup l_b \cup \{l_t\}$. Понятно, что для заключения та-

кой сделки необходимо, чтобы цена покупки была равна цене продажи плюс сумме цен за транспортировку: $p_b = p_s + \sum_{t \in \{l_t\}} p_t$. При этом прибыль продавца и транспортировщиков будет разница их цен и затрат, прибыль покупателя – его выкупная стоимость минус цена покупки $u_b = v_b - p_b$. Если в дележе в проектной игре доход покупателя интерпретировать как минус цену покупки $p_b^* = -p_b$, то тогда правило дележа (сделки) в проектной игре совпадет с правилом сделки в сетевом аукционе. Условие дележа: $p_s + \sum_{t \in \{l_t\}} p_t + p_b^* = h^j = 0$, прибыль агента-покупателя $u_b^* = p_b^* - c_b^* = -p_b - (-v_b) = u_b$. Что и требовалось подтвердить.

Таким образом, проектная игра, построенная по сетевому аукциону, характеризуется тем, что в каждом проекте есть одна особая *прибыльная* операция: все агенты, выполняющие эту операцию, имеют отрицательные затраты.

1.3.3 Рынок товаров коллективного пользования

Товары коллективного пользования характеризуются тем, что при производстве единицы такого товара прибыль от его реализации могут получить сразу несколько экономически агентов (примерами таких товаров могут служить дороги, мосты, или даже программное обеспечение для компьютеров). Это принципиальное отличие данных товаров от тех, которые рассматривались в разделе с сетевыми аукционами. Там в сделке участвовал только один покупатель, который самостоятельно оплачивал реализацию этого товара (производство плюс услуги транспортировки). И другой покупатель уже вынужден был заново оплачивать производство очередной единицы товара для получения прибыли.

При реализации товаров коллективного пользования у покупателей есть принципиальная возможность объединяться и оплачивать все затраты на производство товара *вскладчину*. Таким образом, проектные игры, задающие рынки товаров коллективного пользования, характеризуются наличием про-

ектов, в которых больше одной прибыльной операции, т.е. операции, где все агенты, выполняющие эти операции, имеют отрицательные затраты.

В качестве примера рассмотрим один из проектов с товаром коллективного пользования. Пусть для производства товара требуется несколько операций D_s , а также пусть найдутся агенты A_s , способные выполнить эти операции с заданными затратами: $\{c_l\}_{l \in A_s}$. А также пусть есть некоторое множество агентов A_b , которые могут получить заданные выкупные стоимости $\{v_l\}_{l \in A_b}$ в случае производства единицы данного товара. Ну и естественное условие для осуществления сделки по производству единицы товара – суммарная цена покупки должна быть равна суммарной цене на производство:

$$\sum_{l \in A_b} p_l^b = \sum_{l \in A_s} p_l^s.$$

Идея построения проектной игры по приведенному примеру аналогична той идее в сетевых аукционах, где некоторые величины умножались на коэффициент -1 для покупателя. Множество операций $D^* = D_s \cup D_b$, где D_b – это операции потребления готового продукта агентами из множества A_b . Множество агентов: $A^* = A_s \cup A_b$, и их затраты: $c_l^* = c_l, \forall l \in A_s$, $c_l^* = -v_l, \forall l \in A_b$. Доход такого проекта, как и в случае сетевых аукционов нулевой: $h = 0$. Нетрудно убедиться, что условие дележа и правила вычисления прибылей удовлетворяют естественным соотношениям.

1.4 Основные результаты главы 1

Главным результатом первой главы является построение математической модели проектной игры. Данная модель может быть использована для описания таких теоретико-игровых объектов, как кооперативные игры, сетевые аукционы, рынки товаров коллективного пользования, а также некоторые другие объекты.

На основе описанной модели строится динамическая игра по принципу непрерывного двойного аукциона с наведенными заявками.

Глава 2 Динамические кооперативные игры

Кооперативная теория игр рассматривает экономические ситуации с помощью построения характеристических функций. Обычно теория дает множества справедливых в определенном смысле дележей, а также предлагает конкретные селекторы указанных множеств. В данной главе рассматривается обратная задача, т.е. по заданной характеристической функции строится динамическая игра. Пример исследования такой задачи можно найти в работах [1, 11]. В данной же работе в качестве механизма предлагается непрерывный двойной аукцион с наведенными заявками (см. [41, 43]).

2.1 Общие сведения о кооперативных играх

Рассмотрим кооперативную игру $G^{coop} = \{N, V\}$, где $N = \{1, \dots, n\}$ – множество игроков, $V: 2^N \rightarrow \mathbb{R}_+$ – супераддитивная характеристическая функция, $V = \{V(S) \geq 0\}_{S \subseteq N}$, $V(\emptyset) = 0$, $V(S) + V(T) \leq V(S \cup T) \quad \forall S, T \subseteq N: S \cap T = \emptyset$.

Для удобства будем различать обозначение произвольной коалиции $S \subseteq N$, включающей максимальную коалицию, и обозначение собственной коалиции $S \subset N$.

Одним из ключевых понятий в кооперативной теории является *дележ*. Дележ – исход игры, при котором реализуется максимальная коалиция и все игроки получают неотрицательные выигрыши. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ – это вектор выигрышей игроков, тогда множество дележей можно записать так (см. рис 2.1):

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = V(N), \\ x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

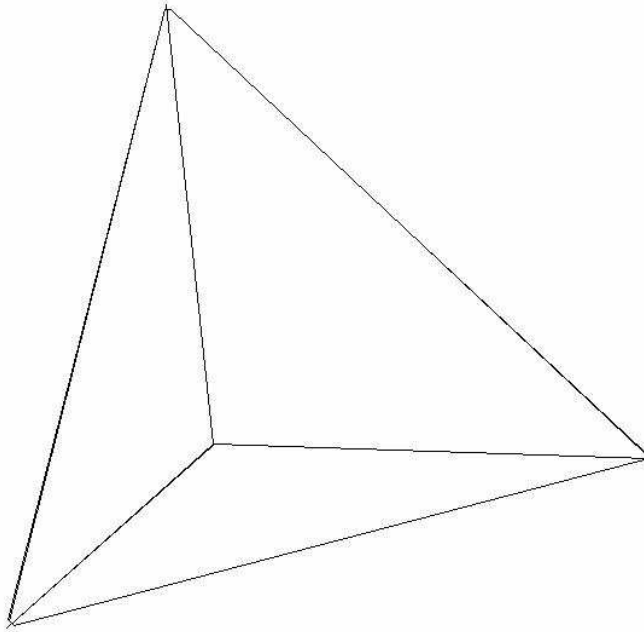


Рис. 2.1 Множество дележей

Подмножество дележей, в которых каждая коалиция получает выигрыш, не меньший, чем она могла бы получить, отделившись от максимальной коалиции, называется *ядром* или *С-ядром* (см. рис 2.2):

$$\begin{cases} V(N) = x(N) \\ V(S) \leq x(S), \forall S \subset N \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} V(N) = x(N) \\ x(S) \leq V(N) - V(N \setminus S), \forall S \subset N \end{cases} \quad (2.1)$$

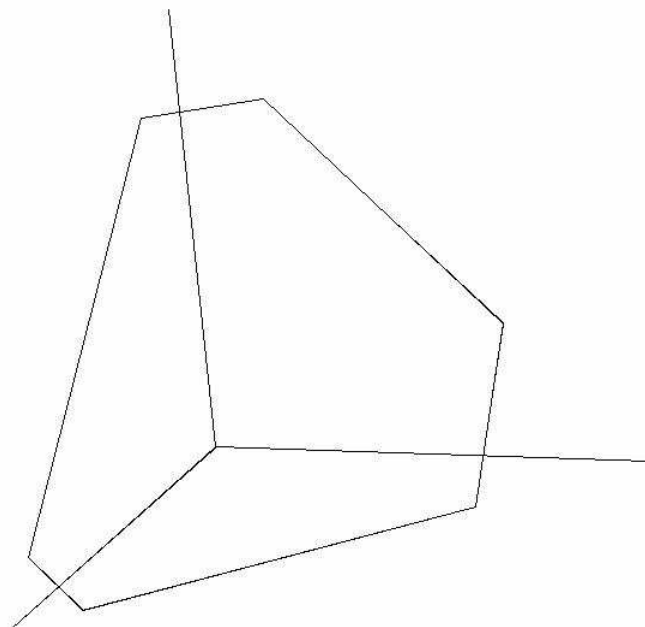


Рис. 2.2 Ядро

Кооперативная игра называется *сбалансированной*, если для любого сбалансированного покрытия $\alpha: 2^N \rightarrow [0;1]$, $\sum_{S \subset N: i \in S} \alpha(S) = 1, \forall i \in N$, выполнено условие

$$\sum_{S \subset N} \alpha(S) V(S) \leq V(N).$$

По теореме Бондаревой–Шепли [15, 22] ядро игры не пусто тогда и только тогда, когда она сбалансирована.

2.2 Динамическая кооперативная игра

Под динамической кооперативной игрой мы будем понимать динамическую проектную игру, которая построена по кооперативной. Подробно будет рассмотрена динамическая кооперативная игра с наведенными заявками.

Кратко напомним правила аукциона с наведенными заявками. Проектная игра, построенная по кооперативной, является игрой с различными агентами, более того, каждый игрок управляет только одним агентом. Поэтому для простоты агентов будем отождествлять с игроками.

Как и прежде, каждый игрок i формирует заявку на получение некоторого выигрыша $p_i(t)$, $i \in N$; $t \in (0, T)$. При этом он получает множество наведенных заявок

$$q_i^S(t) = V(S) - \sum_{j \in S \setminus i} p_j(t), i \in S, S \subseteq N, t \in (0, T), \quad (2.2)$$

– остатки от выигрышей коалиций после вычета заявок партнеров по соответствующим коалициям. Как и для произвольной проектной игры, в качестве предложения вступить в одну из коалиций выбирается максимальная из заявок всех коалиций S , в которые входит игрок i :

$$q_i(t) = \max_{S: i \in S} (q_i^S(t)), i \in N, t \in (0, T). \quad (2.3)$$

И, наконец, вспомним о лексикографическом правиле сравнения заявок. Сначала сравниваются номиналы заявок (чем больше, тем лучше), затем максимальные времена простых (чем меньше, тем лучше), и так далее. В таком случае может оказаться, что если база некоторой заявки является подмножеством другой, то более «короткая» будет лучшей (конечно при условии равенства номиналов). Приведем пример такой пары векторов времен: (3; 2; 1) и (3; 1). Но в таком случае надо в любой паре «вложенных» заявок «лучшей» считать «короткую», например (3; 2; 1) и (3; 2). Это условие эквивалентно приписыванию к вектору времен (справа) нулевого времени.

Таким образом, каждый из игроков участвует в классическом непрерывном двойном аукционе с одним виртуальным партнером. Коалиция образуется в случае, когда один из игроков соглашается с встречной наведенной заявкой или подает свою заявку не больше, чем наведенная. В этом случае сумма заявок участников, по меньшей мере, одной из коалиций, становится не больше, чем номинальный выигрыш этой коалиции. Результатом игры может быть любое непересекающееся множество коалиций, в том числе и пустое.

Итак, мы определили *динамическую кооперативную игру с наведенными заявками*. То есть это динамическая проектная игра с наведенными заявками, причем проектная игра построена по кооперативной таким образом, что любой проект соответствует одной из коалиций.

Вообще говоря, можно различными способами построить проектную игру по кооперативной. Определим два наиболее интересных для анализа случая.

Определение 2.1

Полной динамической кооперативной игрой с наведенными заявками будем называть динамическую кооперативную игру с наведенными заявками, в которой для каждой коалиции существует соответствующий проект.

Определение 2.1(окончание)**Определение 2.2**

Очищенной динамической кооперативной игрой с наведенными заявками будем называть динамическую кооперативную игру с наведенными заявками, в которой проекты построены для тех и только тех коалиций $S \subset N$, у которых выигрыш положителен $V(S) > 0$.

Определение 2.2 (окончание)**2.3 Дополнительные определения и утверждения**

Для анализа динамической кооперативной игры с наведенными заявками потребуется ввести дополнительные понятия, а также сформулировать и доказать некоторые утверждения.

Как и раньше вектор, составленный из заявок всех игроков $x = \{x_i\}_{i \in N}$, будем называть *состоянием игры*. В тексте под состоянием игры понимать не только сами состояния, но и произвольные вектора из множества \mathbb{R}^n . Данное множество будем называть *обобщенным пространством состояний*. Также будем считать, что все известные множества (например, дележи, ядро и другие) лежат в этом пространстве. Суммы заявок игроков коалиций в состоянии x обозначим следующим образом: $\sum_{i \in S} x_i = x(S), \forall S \subseteq N$.

Для дальнейшего анализа потребуется ввести дополнительные определения [42].

Определение 2.3

Малое предъядро для игры $G = \{N, V\}$ – это множество в пространстве \mathbb{R}^n , удовлетворяющее условиям:

$$\left\{ \begin{array}{l} V(N) < x(N) \\ V(S) < x(S) \\ x(S) < V(N) - V(N \setminus S) \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \forall S \subset N \\ \forall S \subset N \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Определение 2.3 (окончание)

Неравенства второй строки (2.4) являются следствием остальных, поэтому определение малого предъядра можно записать так:

$$\left\{ \begin{array}{l} V(N) < x(N) \\ x(S) < V(N) - V(N \setminus S) \end{array} \right. \left| \forall S \subset N$$

Определение 2.4

Большое предъядро для игры $G = \{N, V\}$ – множество в пространстве \mathbb{R}^n , удовлетворяющее условиям:

$$\left\{ \begin{array}{l} V(N) < x(N) \\ V(S) < x(S) \\ x(S) < V(N) - V(N \setminus S) \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \forall S \subset N \\ \forall S \subset N : V(N \setminus S) > 0 \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Определение 2.4 (окончание)

Часть неравенств второй строки (2.5) являются следствием остальных, поэтому определение большого предъядра можно записать так:

$$\left\{ \begin{array}{l} V(N) < x(N) \\ V(S) < x(S) \\ x(S) < V(N) - V(N \setminus S) \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \forall S \subset N : V(S) = 0 \\ \forall S \subset N : V(N \setminus S) > 0 \end{array} \right.$$

Изображения большого и малого предъядер в трехмерном пространстве приведены на рис. 2.3 и 2.4.

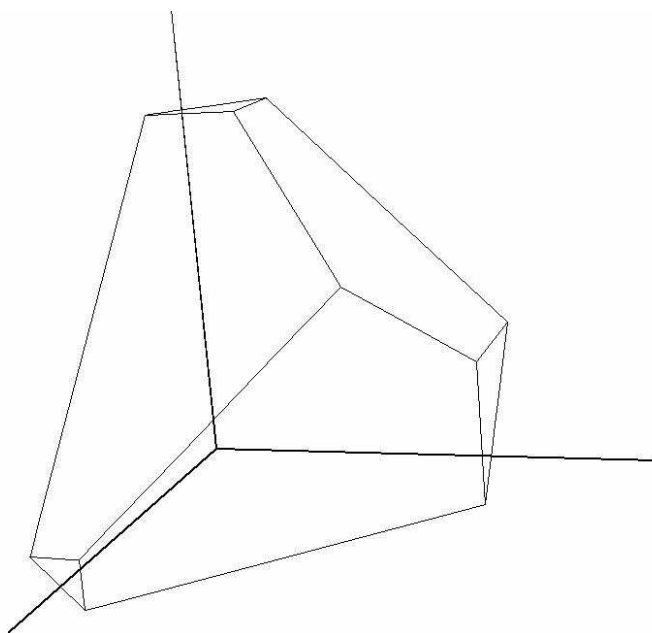


Рис. 2.3 Малое предъядро

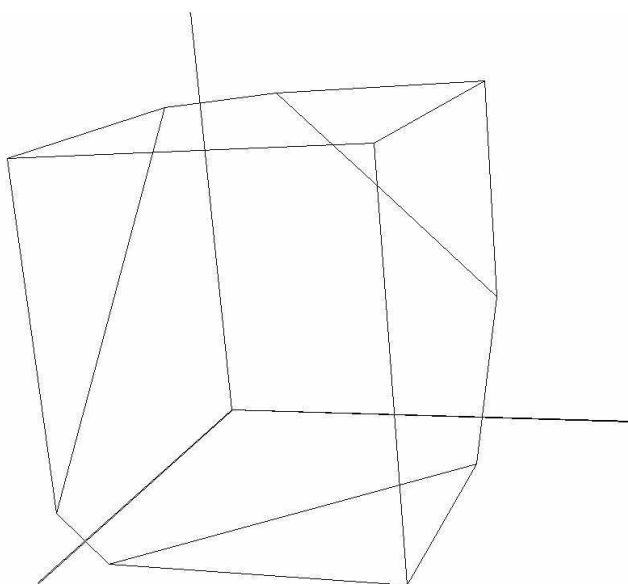


Рис. 2.4 Большое предъядро

2.3.1 Критерии существования предъядер

Мы определили два множества: большое и малое предъядра. В данном разделе будет сформулирована и доказана теорема о непустоте указанных множеств в обобщенном пространстве состояний. Формулы, описывающие множества для предъядер, очень похожи на формулы определения ядра, по-

этому критерию их существования будем искать схожими с условиями теоремы Бондаревой–Шепли.

Определение 2.5

Кооперативная игра называется *строго сбалансированной*, если для любого сбалансированного покрытия $\alpha: 2^N \rightarrow [0;1]$, $\sum_{S \subset N: i \in S} \alpha(S) = 1, \forall i \in N$, выполнено

условие

$$\sum_{S \subset N} \alpha(S)V(S) < V(N). \quad (2.6)$$

Определение 2.5 (окончание)

Строго сбалансированные игры отличаются от просто сбалансированных, тем, что здесь строгие неравенства.

Обозначим множества ядра, малого предъядра и большого предъядра в \mathbb{R}^n через C (Core), SPC (Small PreCore) и LPC (Large PreCore) соответственно.

Введем $n \times (2^n - 2)$ матрицу принадлежности игроков к коалициям:

$$Y = \{y_{iS}\}_{i \in N}^{S \subset N}, y_{iS} = \begin{cases} 1, & i \in S \\ 0, & i \notin S \end{cases}. \text{ Фактически эта матрица совпадает с матрицей принад-}$$

лежности операций к проектам $\{e_i^j\}$, за исключением столбца (строки) с коалицией всех игроков. Тогда определение ядра можно записать через матри-

$$\text{цу } Y: x \in C \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i \in N} x_i = V(N) \\ \sum_{i \in N} y_{iS} x_i \geq V(S), \forall S \subset N \end{cases}, \text{ а определение сбалансированного покры-}$$

тия: $\alpha: 2^N \rightarrow [0;1]$ можно записать:

$$\sum_{S \subset N} y_{iS} \alpha_S = 1, \forall i \in N. \quad (2.7)$$

Рассмотрим экстремальную задачу:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i \in N} x_i \rightarrow \min_{x \in D} \\ D &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} y_{iS} x_i \geq V(S), \forall S \subset N \right\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

и найдем связь ее решения с ядром игры.

Лемма 2.1

Ядро игры имеет размерность $n-1$ тогда и только тогда, когда решение экстремальной задачи (2.8) удовлетворяет условию: $L = \min_{x \in D} f(x) < V(N)$.

Доказательство

Ядро имеет размерность $n-1$ эквивалентно тому, что относительная внутренность ядра непустая: $\dim C = n-1 \Leftrightarrow \text{ri} C \neq \emptyset$ (Здесь $\text{ri} C$ обозначает внутренность относительно подпространства $\sum_{i \in N} x_i = V(N)$, а не относительно аффинной оболочки ядра).

Пусть внутренность ядра не пустая, тогда существует такой вектор x , что

$$\begin{cases} \sum_{i \in N} x_i = V(N) \\ \sum_{i \in N} y_{iS} x_i > V(S), \forall S \subset N \end{cases}$$

Обозначим $\varepsilon = \min_{S \subset N} (\sum_{i \in N} y_{iS} x_i - V(S)) > 0$, тогда вектор $z = (x_1 - \varepsilon, x_2, \dots, x_n) \in D$ и

$f(z) = V(N) - \varepsilon$, а это означает, что $L = \min_{x \in D} f(x) \leq f(z) < V(N)$.

Обратно. Пусть $L < V(N)$ и $\varepsilon = V(S) - L > 0$, тогда для вектора

$$z = (x_1 + \frac{\varepsilon}{n}, x_2 + \frac{\varepsilon}{n}, \dots, x_n + \frac{\varepsilon}{n}) \text{ получаем } \sum_{i \in N} y_{iS} z_i = \sum_{i \in N} y_{iS} x_i + \frac{\varepsilon |S|}{n} \geq V(S) + \frac{\varepsilon |S|}{n} > V(S), \forall S \subset N$$

и $f(z) = V(N)$, а это означает, что $z \in \text{ri} C$. Доказано.

Лемма 2.2

Ядро игры имеет размерность $n-1$ тогда и только тогда, когда игра строго сбалансирована.

Доказательство

Пусть $\text{ri} C \neq \emptyset$, значит $\exists x = (x_1, \dots, x_n) \in \text{ri} C$ такой, что

$$\begin{cases} \sum_{i \in N} x_i = V(N) \\ \sum_{i \in N} y_{iS} x_i > V(S), \forall S \subset N \end{cases}$$

Зафиксируем произвольное сбалансированное покрытие α . Для всех $S \subset N$: $\sum_{i \in N} y_{iS} x_i > V(S)$, значит, $\alpha_S \sum_{i \in N} y_{iS} x_i > \alpha_S V(S), \forall S: \alpha_S > 0$, причем в силу опреде-

ления сбалансированного покрытия найдется хотя бы одна коалиция, для которой $\alpha_S > 0$. Просуммируем полученные неравенства:

$$\sum_{S \subset N} \alpha_S V(S) < \sum_{S \subset N} \alpha_S \sum_{i \in N} y_{iS} x_i = \sum_{i \in N} x_i \sum_{S \subset N} \alpha_S y_{iS} \stackrel{(2.7)}{=} \sum_{i \in N} x_i = V(N). \text{ Значит, игра строго сба-}$$

лансирована.

Обратно, пусть $\text{ri } C = \emptyset$, тогда по лемме 2.1 решение задачи (2.8) удовлетворяет условию $L = \min_{x \in D} f(x) \geq V(N)$. Построим задачу линейного программирования, двойственную задаче (2.8):

$$g(\alpha) = \sum_{S \subset N} \alpha_S V(S) \rightarrow \max_{\alpha \in E} \\ E = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^{2^n - 2} : \sum_{S \subset N} y_{iS} \alpha_S = 1, \forall i \in N; \alpha_S \geq 0, \forall S \subset N \right\}. \quad (2.9)$$

По теореме двойственности $\max_{\alpha \in E} g(\alpha) = L$, а это значит, что существует α^* – решение экстремальной задачи (2.9), которое удовлетворяет условиям: $\alpha^* \in E, g(\alpha^*) = L \geq V(N)$. Таким образом мы нашли сбалансированное покрытие α^* , не удовлетворяющее условию (2.6), значит, игра не является строго сбалансированной. Лемма доказана.

Лемма 2.3

В игре малое предъядро не пусто тогда и только тогда, когда игра строго сбалансирована.

Доказательство

Пусть малое предъядро не пусто, тогда существует $x \in \text{SPC}$:

$$\begin{cases} V(N) < x(N) \\ x(S) < V(N) - V(N \setminus S) \end{cases} \Bigg| \forall S \subset N.$$

Обозначим $\varepsilon = x(N) - V(N) > 0$, тогда

$x(S) = x(N) - x(N \setminus S) > V(N) + \varepsilon - (V(N) - V(S)) = V(S) + \varepsilon, \forall S \subset N$, т. е. любую коалицию можно уменьшить на величину ε , и при этом полученная точка будет лежать внутри ядра. Например, для вектора $z = (x_1 - \varepsilon, x_2, \dots, x_n)$ получим:

$z(N) = f(z) = V(N)$, $z(S) = x(S) - \varepsilon y_{1S} > V(S) + \varepsilon - \varepsilon y_{1S} \geq V(S), \forall S \subset N$, т.е. $z \in riC$ и по лемме 2.2 игра строго сбалансирована.

Обратно. Пусть игра строго сбалансирована, тогда по лемме 2.2 $riC \neq \emptyset$. Это значит, что существует $x \in riC$:

$$\left\{ \begin{array}{l} V(N) = x(N) \\ x(S) < V(N) - V(N \setminus S) \end{array} \right\} \Bigg| \forall S \subset N \quad .$$

Обозначим $\varepsilon = \min_{S \subset N} (V(N) - V(N \setminus S) - x(S)) > 0$, тогда для вектора $z = (x_1 + \frac{\varepsilon}{2}, x_2, \dots, x_n)$

получим $z(N) = x(N) + \frac{\varepsilon}{2} = V(N) + \frac{\varepsilon}{2} > V(N)$ и

$z(S) = x(S) + \frac{\varepsilon}{2} y_{1S} \leq V(N) - V(N \setminus S) - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} y_{1S} < V(N) - V(N \setminus S)$, т.е. $z \in SPC$. Лемма доказана.

зана.

Лемма 2.4

В игре большое предъядро не пусто тогда и только тогда, когда игра строго сбалансирована.

Доказательство

Пусть большое предъядро не пусто, тогда существует $x \in LPC$:

$$\left\{ \begin{array}{l} V(N) < x(N) \\ V(S) < x(S) \\ x(S) < V(N) - V(N \setminus S) \end{array} \right\} \Bigg| \begin{array}{l} \forall S \subset N \\ \forall S \subset N : V(N \setminus S) > 0 \end{array} \quad .$$

Обозначим $\varepsilon = x(N) - V(N) > 0$. Для вектора $z = \frac{V(N)}{V(N) + \varepsilon} (x_1, x_2, \dots, x_n)$ получим:

$z(N) = \frac{V(N)}{V(N) + \varepsilon} x(N) = V(N)$. Все компоненты вектора z положительны:

$z(S) > 0, \forall S \subset N$ т.к. $x(S) > V(S) \geq 0, \forall S \subset N$. Докажем, что для вектора z выполнены

условия внутренности ядра: $z(S) < x(S) < V(N) - V(N \setminus S), \forall S \subset N : V(N \setminus S) > 0$;

$z(S) = z(N) - z(N \setminus S) = V(N) - z(N \setminus S) < V(N) = V(N) - V(N \setminus S), \forall S \subset N : V(N \setminus S) > 0$. Мы до-

казали, что $z \in riC$ и по лемме 2.2 игра строго сбалансирована.

Обратно, пусть игра строго сбалансирована, тогда по лемме 2.3 малое предъядро не пусто, а т.к. каждая точка малого предъядра является точкой большого предъядра и большое предъядро не пусто. Доказано.

Теорема 2.1

Для кооперативной игры n лиц следующие утверждения эквивалентны:

- Игра строго сбалансирована.
- Ядро игры имеет размерность $n-1$.
- Малое предъядро игры не пусто.
- Большое предъядро не пусто.

Теорема 2.1 (окончание)

Формально доказательство следует из лемм 2.1 – 2.4.

Доказательство эквивалентности первого и второго пунктов аналогично доказательству теоремы Бондаревой–Шепли. Далее, если внутренность ядра непуста, то можно из любой точки внутренности немного «подняться» вдоль одной из осей и оказаться в малом предъядре. Значит, из непустоты внутренности ядра следует непустота малого предъядра. Малое предъядро содержится в большом, поэтому из непустоты малого следует непустота большого. И, наконец, из любой точки большого предъядра можно «спуститься» вдоль направления к началу координат и попасть во внутреннюю точку ядра. Значит, из непустоты большого предъядра следует непустота внутренности ядра.

Сформулируем и докажем еще несколько утверждений, касающихся новых понятий.

Утверждение 2.1

Для строго сбалансированной игры пересечение замыкания малого предъядра с плоскостью дележей ($x(N) = V_N$) совпадает с ядром.

Доказательство следует из определений ядра и малого предъядра.

Утверждение 2.2

Для строго сбалансированной игры пересечение замыкания большого предъядра с плоскостью дележей ($x(N) = V_N$) совпадает с ядром.

Доказательство

По определению малое предъядро содержится в большом предъядре, значит, пересечение замыкания малого предъядра с плоскостью дележей содержится в исследуемом пересечении. Докажем обратное включение. Не хватает ограничений $x(S) \leq V(N), \forall S: V(N \setminus S) = 0$, но они следуют из того, что $x(S) = x(N) - x(N \setminus S) \leq x(N) = V(N), \forall S: V(N \setminus S) = 0$.

Доказано.

2.3.2 Блокирующие состояния

Напомним, что для динамической проектной игры активный агент – это агент, который еще не вступил в сделку и может управлять своей заявкой. В динамической кооперативной игре с наведенными заявками, как уже было сказано, агентов будем отождествлять с игроками.

Любая сделка в динамической кооперативной игре приводит к образованию одной из коалиций, т.к. каждый проект – это коалиция. Таким образом, замыкающий игрок, соглашаясь с наведенной заявкой, образует коалицию.

Состояние, в котором все игроки активны, назовем *активным состоянием*. Понятно, что если игра находится в активном состоянии, то до этого момента включительно еще не произошло ни одной сделки. Далее определим еще несколько видов активных состояний. Блокирующие состояния были исследованы в работе [49].

Определение 2.6

В динамической кооперативной игре с наведенными заявками *блокирующим состоянием* назовем активное состояние $p \in \mathbb{R}^n$, в котором никакой игрок своим ходом не может реализовать никакую коалицию, кроме коалиции всех игроков N .

Определение 2.6 (окончание)

Теперь вспомним о дополнительных определениях и сформулируем и докажем теоремы. Для этого необходимо доказать несколько лемм.

Лемма 2.5

В динамической кооперативной игре с наведенными заявками активными состояниями являются те и только те состояния $x \in \mathbb{R}^n$, для которых выполняются неравенства:

$$x(S) > V(S), \forall S \subseteq N.$$

Доказательство

Неравенства в условии леммы эквивалентны, что в данный момент не возможна ни одна коалиция (не выполняются условия реализации проекта – коалиции). Но сделка не могла произойти и до этого момента, потому что иначе нашлась бы коалиция $S_0 \subseteq N$, такая, что для нее выполнилось условие $x(S_0) = V(S_0)$. После этого агенты перестали бы быть активными и не смогли изменять свои заявки. Таким образом, неравенства условий леммы эквивалентны активности состояния x .

Лемма 2.6

Для динамической кооперативной игры с наведенными заявками справедливо следующее утверждение. Чтобы наведенная заявка ρ^N с максимальной коалиции была лучше наведенной заявки ρ с другой коалиции необходимо и достаточно, чтобы ее номинал $p(\rho^N)$ был строго больше номинала другой заявки:

$$p(\rho^N) > p(\rho).$$

Доказательство

Достаточность очевидна: если номинал больше, то по основному правилу сравнения заявка с максимальной коалиции лучше.

Необходимость. Если номинал заявки $p(\rho^N)$ меньше номинала другой заявки $p(\rho)$, то заявка ρ^N не может быть лучше по основному правилу срав-

нения наведенных заявок. Таким образом, самое нетривиальное утверждение леммы касается случая равенства номиналов. В такой ситуации работает лексикографическое правило сравнения наведенных заявок. Наведенная заявка ρ^N с максимальной коалиции состоит из максимально возможного числа простых заявок, а наведенная другая заявка ρ состоит из заведомо меньшего количества простых, причем база заявки ρ является подмножеством базы заявки ρ^N . В таком случае, по определению, лексикографическое правило однозначно отдает приоритет заявке с меньшей базой. Мы доказали, что в случае равенства номиналов наведенная заявка с максимальной коалиции всегда будет оказываться хуже любой другой наведенной заявки. Лемма доказана.

Доказательство (окончание)

Для доказательства очередной леммы необходимо ввести еще одно определение. Для состояния игры $x \in \mathbb{R}^n$ определим *эксцесс* для каждой коалиции как разницу между суммой заявок участников коалиции и номинальным выигрышем этой коалиции: $\sigma(S) \triangleq x(S) - V(S), \forall S \subseteq N$.

Лемма 2.7

В состоянии $x \in \mathbb{R}^n$ динамической кооперативной игры с наведенными заявками следующие утверждения для некоторой собственной коалиции $S \subset N$ эквивалентны.

- Для коалиции S выполнено условие $x(N \setminus S) < V(N) - V(S)$.
- Для любого игрока i из коалиции S номинал наведенной заявки с коалиции S строго меньше номинала наведенной заявки с максимальной коалиции N заявки: $q_i^S < q_i^N, \forall i \in S$.

Доказательство

Перепишем наведенные заявки, используя определение эксцесса. Наведенная заявка для игрока i с коалиции S : $q_i^S = V(S) - x(S \setminus i) = V(S) - x(S) + x_i = x_i - \sigma(S), \forall i \in S$. Аналогично вычисляется наве-

денная заявка для игрока i с коалиции N : $q_i^N = x_i - \sigma(N), \forall i \in S$. Теперь докажем утверждение леммы, используя эквивалентные преобразования.

$$\begin{aligned}
 & x(N \setminus S) < V(N) - V(S) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow x(N) - x(S) < V(N) - V(S) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow x(N) - V(N) < x(S) - V(S) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \sigma(N) < \sigma(S) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow x_i - \sigma(S) < x_i - \sigma(N), \forall i \in S \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow q_i^S < q_i^N, \forall i \in S. \text{ Лемма доказана.}
 \end{aligned}$$

Теперь можно сформулировать и доказать основные теоремы о блокирующих состояниях.

Теорема 2.2

В полной динамической кооперативной игре с наведенными заявками множество блокирующих состояний совпадает с малым предъядром.

Теорема 2.2 (окончание)

Условие теоремы можно переформулировать. В полной динамической кооперативной игре с наведенными заявками состояние $x \in \mathbb{R}^n$ является сильно блокирующим в том и только в том случае, если оно принадлежит малому предъядру.

Доказательство

Вспомним, что в полной динамической кооперативной игре с наведенными заявками проекты строятся для всех без исключения коалиций. Также вспомним определение малого предъядра. По определению, принадлежность состояния $x \in \mathbb{R}^n$ малому предъядру означает выполнение условий (см. 2.4):

$$\left\{ \begin{array}{l} V(N) < x(N) \\ V(S) < x(S) \\ x(S) < V(N) - V(N \setminus S) \end{array} \right. \begin{array}{l} \vdots \\ \forall S \subset N \\ \forall S \subset N \end{array}$$

По лемме 2.5 первое и набор вторых условий малого предъядра эквивалентно тому, что состояние x активно.

Условие блокирования (никакой игрок своим ходом не может реализовать никакую коалицию, кроме коалиции всех игроков) в силу правила аукциона эквивалентно тому, что для каждого игрока $i \in N$ наилучшей наведенной заявкой является заявка, наведенная с максимальной коалиции ρ_i^N с номиналом $p(\rho_i^N) = q_i^N$. Применяя лемму 2.6 ко всем наведенным заявкам с собственных коалиций $S \subset N$, получаем, что заявка с максимальной коалиции является наилучшей тогда и только тогда, когда ее номинал строго больше номиналов других заявок, причем это выполнено для всех игроков и коалиций: $q_i^N > q_i^S, \forall i \in N, \forall S \subset N: i \in S$. Применяя лемму 2.7 ко всем собственным коалициям $S \subset N$, получаем, что последнее условие эквивалентно условию $x(N \setminus S) < V(N) - V(S), \forall S \subset N$. А набор этих условий эквивалентен третьему набору условий малого предъядра (2.4): в этом нетрудно убедиться, сделав замену $S \rightarrow N \setminus S$. Теорема доказана.

Доказательство (окончание)

Теорема 2.3

В очищенной динамической кооперативной игре с наведенными заявками множество блокирующих состояний совпадает с большим предъядром.

Теорема 2.3 (окончание)

Вспомним, что в очищенной динамической кооперативной игре с наведенными заявками проекты строятся только коалиций с положительным выигрышем $V(S) > 0$. Также вспомним определение большого предъядра. По определению, принадлежность состояния $x \in \mathbb{R}^n$ большому предъядру означает выполнение условий (см. 2.5):

$$\left\{ \begin{array}{l} V(N) < x(N) \\ V(S) < x(S) \\ x(S) < V(N) - V(N \setminus S) \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \forall S \subset N \\ \forall S \subset N: V(N \setminus S) > 0 \end{array} \right.$$

По лемме 2.5 первое и набор вторых условий малого предъядра эквивалентно тому, что состояние x активно.

Условие блокирования (никакой игрок своим ходом не может реализовать никакую коалицию, кроме коалиции всех игроков) в силу правила аукциона эквивалентно тому, что для каждого игрока $i \in N$ наилучшей наведенной заявкой является заявка, наведенная с максимальной коалиции ρ_i^N с номиналом $p(\rho_i^N) = q_i^N$. Применяя лемму 2.6 ко всем наведенным заявкам с собственных коалиций с положительными выигрышами $S \subset N: V(S) > 0$, получаем, что заявка с максимальной коалиции является наилучшей тогда и только тогда, когда ее номинал строго больше номиналов других заявок, причем это выполнено для всех игроков и выбранных коалиций: $q_i^N > q_i^S, \forall i \in N, \forall S \subset N: i \in S, V(S) > 0$. Применяя лемму 2.7 ко всем собственным коалициям с положительным выигрышем $S \subset N: V(S) > 0$, получаем, что последнее условие эквивалентно условию $x(N \setminus S) < V(N) - V(S), \forall S \subset N: V(S) > 0$. А набор этих условий эквивалентен третьему набору условий большого предъядра (2.5): в этом нетрудно убедиться, сделав замену $S \rightarrow N \setminus S$. Теорема доказана.

Доказательство (окончание)

Осталось сформулировать еще несколько утверждений, касающихся блокирующих состояний. Они в отличие от доказанных критериев будут справедливо только в одну сторону.

Утверждение 2.3

Если полная динамическая кооперативная игра с наведенными заявками находится в состоянии x из большого предъядра, то никакой игрок своим ходом не сможет реализовать никакую коалицию с положительным выигрышем, кроме, быть может, коалиции всех игроков N .

Доказательство

Пусть состояние x принадлежит большому предъядру. Тогда по лемме 2.5 x – активное состояние. Применяя лемму 2.7 ко всем собственным коали-

циям с положительным выигрышем $S \subset N: V(S) > 0$, получаем, что из последних неравенств (2.5) следует, что $q_i^S < q_i^N$ для всех игроков участвующих в каждой коалиции $i \in S$. А по лемме 2.6 это означает, что никакая коалиция с положительным выигрышем не может быть наилучшей заявкой, т.к. она хуже заявки с максимальной коалиции. Таким образом, никакой игрок не может реализовать (согласившись с наилучшей наведенной заявкой) никакую коалицию с положительным выигрышем, кроме, быть может, коалиции всех игроков N .

Утверждение 2.4

В очищенной динамической кооперативной игре с наведенными заявками любая точка малого предъядра является блокирующим состоянием.

Доказательство

Доказательство следует, из теоремы 2.3 и того, что малое предъядро содержится в большом.

2.3.3 Условия согласованности

Задача построения динамической кооперативной игры – это обратная задача к рассматриваемой в кооперативной теории. То есть по заданной характеристической функции строится новая динамическая игра. Но к полученной динамической игре можно снова применить кооперативный подход и построить новую характеристическую функцию. При этом сразу возникает вопрос: а совпадает ли новая характеристическая функция с исходной?

Чтобы исследовать поставленный вопрос, введем еще несколько понятий. Назовем динамическую кооперативную игру (*вполне* или *сильно*) *согласованной*, если характеристическая функция, построенная по динамической игре, совпадает с исходной характеристической функцией.

Такая полная согласованность – это слишком жесткое условие. Его можно немного смягчить: ведь основной предмет исследования в кооперативных играх – это дележи, т.е. можно требовать не полного совпадения характеристических функций, а только возможности реализации дележей.

Определение 2.7

Множество достижимости в динамической кооперативной игре – это подмножество дележей, которое может реализоваться в игре.

Определение 2.7 (окончание)

Используя введенное понятие, можем более формально определить слабую согласованность. Назовем динамическую кооперативную игру *слабо согласованной*, если множество достижимости не пусто.

Теперь исследуем вопрос согласованности для динамических кооперативных игр с наведенными заявками. Основным результатом будет следующая теорема.

Теорема 2.4

Множество достижимости для динамической кооперативной игры наведенными заявками совпадает с множеством внутренних точек ядра.

Доказательство

Пусть вектор x принадлежит внутренности ядра. Докажем, что точка x достижима. Обозначим $\varepsilon = \min_{S \subset N} (V(N) - V(N \setminus S) - x(S)) > 0$, тогда вектор $z = (x_1 + \frac{\varepsilon}{2}, x_2, \dots, x_n)$ будет принадлежать малому предъядру (см. доказательство леммы 2.3). По теореме 2.2 состояние z – блокирующее состояние, а значит, активно. В активное состояние попасть просто: все игроки последовательно выставляют соответствующие заявки. При этом ни одна коалиция не заключается, т.к. состояние активно. Далее первый игрок соглашается со своей наведенной заявкой (в блокирующем состоянии наилучшая заявка наводится с максимальной коалиции). По правилу аукциона совершается сделка – максимальная коалиция, причем все получают доход согласно своим заявкам. Таким образом, игра достигнет желаемого состояния x .

Обратно. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ – достижимая точка. По правилу аукциона состояние x было достигнуто, когда один из игроков согласился с наведенной заявкой (обозначим его номер $i \in N$). Раз x – достижимая точка, то это некоторый дележ игры, т.е. это реализованная максимальная коалиция. Итак, игрок i замкнул максимальную коалицию, уменьшив свою заявку на некоторую величину $\varepsilon_i > 0$, значит, до этого момент все игроки были активными, т.е. состояние $z = (x_1, \dots, x_i + \varepsilon_i, \dots, x_n)$ – активно. Поскольку игрок i в состоянии z замкнул максимальную коалицию, то в состоянии z наведенная заявка с максимальной коалиции ρ_i^N была лучше любой другой наведенной заявки для этого игрока $\rho_i^S, \forall S \subset N: i \in S$. По лемме 2.6 для номиналов указанных заявок следует соотношение: $q_i^N > q_i^S, \forall i \in S$. Применяя лемму 2.7 для всех собственных коалиций, содержащих игрока i , получаем соотношение $z(N \setminus S) = V(N) - V(S), \forall S \subset N: i \in S$. Игрок i не входит в рассматриваемые коалиции, поэтому значения доходов этих коалиций одинаковы для векторов x и z : $x(N \setminus S) = z(N \setminus S) = V(N) - V(S), \forall S \subset N: i \in S$. Вспоминаем, что состояние x – дележ, поэтому $x(N) = V(N)$. Окончательно получаем соотношение для собственных коалиций, содержащих игрока i : $x(S) > V(S), \forall S \subset N: i \in S$.

Теперь докажем аналогичную формулу для собственных коалиций, не содержащих игрока i . Состояние z активно, поэтому по лемме 2.5 выполнено соотношение $z(N) > V(N), \forall S \subseteq N$. Выберем коалиции, в которые игрок i не входит, поэтому значения доходов этих коалиций одинаковы для векторов x и z : $x(S) = z(S) > V(S), \forall S \subset N: i \notin S$.

Итак, мы доказали, что для вектора x выполнены соотношения: $\begin{cases} x(N) = V(N) \\ x(S) > V(S), \forall S \subset N \end{cases}$, а это означает, что x принадлежит внутренности ядра.

Теорема доказана.

Доказательство (окончание)

Теперь можно подытожить все полученные результаты и сформулировать критерии согласованности для динамических кооперативных игр с наведенными заявками.

Утверждение 2.5

Для того чтобы динамическая кооперативная игра с наведенными заявками была слабо согласованна, необходимо и достаточно, чтобы исходная кооперативная игра была строго сбалансирована.

Доказательство

Доказательство напрямую следует из теорем 2.1 и 2.4.

Утверждение 2.6

Для того чтобы динамическая кооперативная игра с наведенными заявками была сильно согласованна, необходимо и достаточно, чтобы любая подыгра исходной кооперативной игры была строго сбалансирована.

Доказательство

Строгая согласованность подыгры по теореме 2.4 эквивалентна, тому что достижима соответствующая коалиция, а это значит, что значения характеристических функций совпадают на каждой коалиции.

2.4 Примеры для игры трех лиц

В этом разделе будем рассматривать кооперативную игру трех лиц. Здесь будут представлены основные результаты, в том числе графически.

2.4.1 Общие сведения об игре трех лиц

В этом разделе будем рассматривать игры, в которых множество игроков состоит из трех элементов $N = \{1, 2, 3\}$. Тогда множество коалиций будет состоять из семи элементов: три одиночных, три парных и одна коалиция трех игроков.

Для уменьшения размерности игру трех лиц представляют в (0-1)-редуцированной форме: выигрыши одиночных коалиций приводятся к нулевым, а также выполняется нормировка на выигрыш максимальной коалиции, чтобы он был равен единице (или сотне). Таким образом, остается три параметра – выигрыши парных коалиций:

$$V(1) = V(2) = V(3) = 0, V(12) = a, V(13) = b, V(23) = c, V(123) = d.$$

В силу супераддитивности характеристической функции без ограничения общности можно положить $0 \leq a \leq b \leq c \leq d = 100$.

Одним из ключевых понятий в кооперативной теории является дележ. Дележ – исход игры, при котором реализуется максимальная коалиция и все игроки получают неотрицательные выигрыши. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$ – это вектор выигрышей игроков, тогда множество дележей (см. рис. 2.1) можно записать так:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = d, \\ x_i \geq 0, \forall i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Подмножество дележей, в которых каждая коалиция получает выигрыш, не меньший, чем она могла бы получить, отделившись от максимальной коалиции, называется ядром (или С-ядром):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = d, \\ x_1 + x_2 \geq a, \\ x_1 + x_3 \geq b, \\ x_2 + x_3 \geq c, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq d - c, \\ 0 \leq x_2 \leq d - b, \\ 0 \leq x_3 \leq d - a, \\ d = x_1 + x_2 + x_3. \end{cases}$$

По теореме Бондаревой–Шепли [15, 22] ядро не пусто тогда и только тогда, когда она сбалансирована. Для приведенной кооперативной игры трех лиц сбалансированность игры определяется параметром κ , где

$$\kappa = \min(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3),$$

$$\kappa_0 = d - \frac{a+b+c}{2},$$

$$\kappa_1 = d - c,$$

$$\kappa_2 = d - b,$$

$$\kappa_3 = d - a.$$

Таким образом, ядро не пусто тогда и только тогда, когда $\kappa \geq 0$. Причем, если $\kappa > 0$, то игра строго сбалансирована и ядро не вырождено, т.е. имеет максимальную размерность. Для игр трех лиц невырожденное ядро является плоским многоугольником.

2.4.2 Динамическая игра для кооперативной игры трех лиц

Обычно кооперативная игра, заданная характеристической функцией, строится по некоторой экономической или теоретико-игровой модели. Рассмотрим обратную задачу. Пусть задана кооперативная игра. Построим для нее некоторую динамическую игру, т.е. механизм взаимодействия игроков между собой. Согласно этому механизму игроки должны иметь возможность объединяться в коалиции и получать выигрыши по заданной характеристической функции. Естественное условие состоит в том, что кооперативная игра, соответствующая построенному механизму, должна совпадать с исходной кооперативной игрой.

Один из примеров построения подобных механизмов можно найти в [1, 11], где для образования коалиции используется последовательное голосование за предложенный одним из игроков дележ.

Далее будет определен и проанализирован механизм наведенных заявок для кооперативных игр.

2.4.3 Аукцион с наведенными заявками для игры трех лиц

Теперь опишем механизм для случая произвольной строго сбалансированной кооперативной игры трех лиц в редуцированной форме. Есть четыре выигрывающие коалиции с выигрышами a, b, c, d . Как и в игре двух лиц каждый игрок формирует заявку на получение некоторого выигрыша

$p_i(t)$, $i = 1, 2, 3; t \in (0, T)$. Каждый игрок может вступить в одну из трех коалиций, соответственно, он получает три наведенные заявки. Например, первый игрок получает заявки

$$q_1^a(t) = a - p_2(t), q_1^b(t) = b - p_3(t), q_1^d(t) = d - p_2(t) - p_3(t),$$

– остатки от выигрышей коалиций после вычета заявок партнеров по соответствующим коалициям. Естественно в качестве заявки с предложением первому игроку вступить в коалицию выбрать максимальную из полученных заявок: $q_1(t) = \max(q_1^a(t), q_1^b(t), q_1^d(t))$. Это согласуется с основным правилом непрерывного двойного аукциона, когда наилучшей заявкой типа «спрос» является заявка с максимальным номиналом.

Второе условие: в случае если номиналы заявок равны, приоритет отдается той заявке, которая была подана раньше. В данном случае временем заявки будет максимальное время подачи простых заявок, из которых состоит наведенная. Но даже в случае трех игроков может возникнуть неоднозначность. Предположим, что сначала подал заявку игрок 1 в момент t_1 , затем игрок 2 в момент t_2 , тогда в момент t_2 образуются сразу две заявки для игрока 3: $q_3^d(t_2)$ и $q_3^c(t_2)$. И если их номиналы окажутся равны, то заявки будут несравнимы в классическом аукционе. В таком случае предпочтение отдается парным коалициям. Такой приоритет выбран для выполнения условий согласованности, о которых будет написано ниже.

Таким образом, каждый из игроков участвует в классическом непрерывном двойном аукционе с одним виртуальным партнером. Коалиция образуется в случае, когда один из игроков соглашается с встречной наведенной заявкой или подает свою заявку не больше, чем наведенная. В этом случае сумма заявок участников по меньшей мере одной из коалиций становится не больше, чем номинальный выигрыш этой коалиции. В случае, если в течение всей игры $(0, T)$ не будет заключена ни одна сделка, все игроки получают нулевой выигрыш. В случае заключения парной коалиции, оставшийся игрок получает нулевой выигрыш.

Условия согласованности выбираются из следующих соображений. Нетрудно проверить, что если ядро игры пусто, то никакие (с том числе совместные) действия игроков не смогут привести к образованию максимальной коалиции (для замыкающего игрока всегда найдется заявка с парной коалиции, которая будет для него выгоднее, чем максимальная). Значит, одним из необходимых условий возможности дележа является непустота ядра. Также, можно заметить, что если ядро состоит из одной точки, например $(100/3, 100/3, 100/3)$, когда $a = b = c = 200/3$, то в этом случае реализовать дележ тоже будет невозможно. Это следует из того, что если два игрока подадут свои заявки, то в этот же момент образуется парная коалиция.

Подмножество дележей, которое может реализоваться в динамической игре, назовем *множеством достижимости* для аукциона с наведенными заявками.

Из выше написанного следует, что точки вне ядра не принадлежат множеству достижимости. Также можно проверить, что крайние точки ядра тоже не принадлежат множеству достижимости. Осталось проверить простые границы ядра (не угловые точки). Они не будут достижимы в том и только в том случае, если приоритет будет отдаваться заявке, наведенной коалицией двух игроков.

Таким образом, для определенного выше механизма множество достижимости – это внутренние точки ядра. В случае, если бы мы определили приоритет в обратную сторону, множеством достижимости было бы множество всех точек ядра за исключением крайних точек. Такое множество не является ни открытым, ни замкнутым.

2.4.4 Блокирующие состояния

Рассмотрим предложенный механизм более детально. Приведем анализ от лица первого игрока. Он не входит только в одну из четырех коалиций с номинальным выигрышем $V(2,3) = c$. Зададимся вопросом, может ли игрок 1 сделать такую заявку, чтобы образование коалиции (2,3) стало невозможным

в рамках аукциона. Запишем условие, при котором второму и третьему игрокам будет выгоднее вступить в максимальную коалицию: $d - p_2 - p_1 = q_3^d > q_3^c = c - p_2$; $d - p_3 - p_1 = q_2^d > q_2^c = c - p_3$. Решая систему неравенств относительно p_1 получаем $p_1 < d - c$.

Проведя аналогичные рассуждения для остальных игроков, получим блокирующее состояние (p_1, p_2, p_3) :

$$\begin{cases} 0 < p_1 < d - c, 0 < p_2 < d - b, 0 < p_3 < d - a, \\ d < p_1 + p_2 + p_3. \end{cases}$$

Назовем полученное множество *большим предъядром* (см. рис. 2.3). Связь с ядром можно заметить, сравнивая последнюю систему неравенств определением ядра. Можно сформулировать следующее утверждение. Если игра находится в состоянии $p = (p_1, p_2, p_3)$ из большого предъядра, то никакой игрок своим ходом не сможет реализовать никакую коалицию с положительным выигрышем, кроме, быть может, максимальной.

Теперь построим множество состояний игры, в которых блокированными оказываются все коалиции, а не только выигрывающие:

$$\begin{cases} p_1 < d - c, p_2 < d - b, p_3 < d - a, \\ p_1 + p_2 < d, p_1 + p_3 < d, p_2 + p_3 < d, \\ d < p_1 + p_2 + p_3. \end{cases}$$

Назовем полученное множество *малым предъядром* (см. рис. 2.4) Сформулируем еще одно утверждение. Если игра находится в состоянии $p = (p_1, p_2, p_3)$ из малого предъядра, то никакой игрок своим ходом не сможет реализовать никакую коалицию, кроме максимальной.

2.5 Игры с нулевыми выигрышами малых коалиций

Легко убедиться, что в случае, если все коалиции имеют положительный выигрыш, большое и малое предъядра совпадают. Поэтому для разделения этих понятий необходимо рассмотреть подмножество игр, в которых часть коалиций имеют нулевой выигрыш.

В этом разделе будет выделен класс игр, в котором большое и малое предъядра качественно отличаются, причем для большого предъядра можно привести наглядную геометрическую и экономическую интерпретацию.

Определение 2.8

Игра с нулевыми выигрышами малых коалиций – это кооперативная игра, характеристическая функция которой удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} V(S) = 0, \forall S \subset N : |S| \leq n-2 \\ V(S) > 0, \forall S \subset N : |S| = n-1 \end{cases}$$

Определение 2.8 (окончание)

Нетрудно убедиться, что приведенная игра трех лиц принадлежит этому классу. Многие результаты, полученные для игр трех лиц, будут справедливы и для всего класса игра с нулевыми выигрышами малых коалиций [49, 51].

Обозначим выигрыши ненулевых коалиций и сумму выигрышей всех собственных коалиций следующим образом:

$$\begin{aligned} V(N \setminus i) &\triangleq V_{-i}, \forall i \in N \\ V(N) &\triangleq V_N \\ \Sigma_{-N} &\triangleq \sum_{i \in N} V_{-i} \end{aligned}$$

Без ограничения общности будем считать, что выполняется условие

$$0 < V_{-n} \leq \dots \leq V_{-1} \leq V_N.$$

Теорема 2.5

Игра с нулевыми выигрышами малых коалиций строго сбалансирована тогда и только тогда, когда

$$\kappa = \min_{i \in N} (\kappa_0, \kappa_i) > 0, \tag{2.10}$$

где $\kappa_0 = V_N - \frac{\Sigma_{-N}}{n-1}$, $\kappa_i = V_N - V_{-i}$, $\forall i \in N$.

Доказательство

Если игра строго сбалансирована, то по тереме 2.1 для покрытия α , такого что $\alpha(N \setminus i) = \frac{1}{n-1}$, $\forall i \in N$ и $\alpha(S) = 0, \forall S : |S| \neq n-1$ будет выполнено неравенство:

$$\begin{aligned} \sum_{S \subset N} \alpha(S) V_S < V_N &\Leftrightarrow \\ \sum_{i \in N} \frac{1}{n-1} V_{-i} < V_N &\Leftrightarrow \\ \frac{V_{-n} + \dots + V_{-1}}{n-1} < V_N &\Leftrightarrow \\ \Sigma_{-N} < (n-1)V_N &\Leftrightarrow \\ 0 < \kappa_0. \end{aligned}$$

Далее для каждого игрока $i \in N$ возьмем покрытие α_i , состоящее только из одной коалиции $N \setminus i$, т.е. $\alpha_i(N \setminus i) = 1$ и $\alpha_i(S) = 0, \forall S \subset N: S \neq N \setminus i$. Условие строгой сбалансированности для таких покрытий будут означать, что $\kappa_i > 0, \forall i \in N$.

Обратно, предположим, что выполняется условие $\kappa > 0$ и докажем, что вектор $z = \frac{V_N}{V_N + (n-1)\kappa_0} (V_N - V_{-1}, \dots, V_N - V_{-n})$ принадлежит внутренности ядра.

Сумма компонент удовлетворяет условию ядра:

$$z(N) = \frac{V_N}{V_N + (n-1)\kappa_0} (nV_N - \sum_{i \in N} V_{-i}) = \frac{V_N}{nV_N - \Sigma_{-N}} (nV_N - \Sigma_{-N}) = V_N.$$

Чтобы проверить выполнение условий $z(S) > V(S), \forall S \subset N: V(S) = 0$ достаточно проверить условия:

$$z_i > 0, \forall i \in N: \quad z_i = \frac{V_N}{V_N + (n-1)\kappa_0} (V_N - V_{-i}) \stackrel{(2.10)}{>} 0, \forall i \in N.$$

Осталось проверить условия $z(S) > V(S), \forall S \subset N: V(S) > 0$, т.е. для всех коалиций вида $S = N \setminus i, \forall i \in N$:

$$\begin{aligned} z(N \setminus i) - V(N \setminus i) &= z(N) - z_i - V_{-i} = V_N - \frac{V_N}{V_N + (n-1)\kappa_0} (V_N - V_{-i}) - V_{-i} = \\ &= (V_N - V_{-i}) \left(1 - \frac{V_N}{V_N + (n-1)\kappa_0} \right) = (V_N - V_{-i}) \left(\frac{V_N(n-1)\kappa_0}{V_N + (n-1)\kappa_0} \right) = \frac{(n-1)\kappa_0 V_N}{V_N + (n-1)\kappa_0} \stackrel{(2.10)}{>} 0, \forall i \in N. \end{aligned}$$

Доказано.

Доказательство (окончание)

Геометрическую интерпретацию большого предъядра можно сформулировать в следующей теореме.

Теорема 2.6

Для строго сбалансированных игр с нулевыми выигрышами малых коалиций большое предъядро является усеченным параллелепипедом:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_N < \sum_{i \in N} x_i \\ 0 < x_i \\ x_i < V_N - V_{-i} \end{array} \right. \begin{array}{l} \forall i \in N \\ \forall i \in N \end{array} .$$

Доказательство

В ограничения параллелепипеда входят все неравенства из определения большого предъядра, значит, большое предъядро содержится в параллелепипеде.

Докажем обратное включение. Не хватает ограничений $x(S) > 0, \forall S: 2 \leq |S| \leq n-2$, но они следуют из ограничений $x_i > 0, \forall i \in N$.

Так же не хватает ограничений $V_{-i} < x(N \setminus i), \forall i \in N$. Но они непосредственно следуют из определения усеченного параллелепипеда:
 $V_{-i} < V_N - x_i < x(N) - x_i = x(N \setminus i), \forall i \in N$.

Доказано.

Доказательство (окончание)

Экономическая интерпретация заключается в наличии индивидуальных блокирующих стратегий в динамической кооперативной игре с наведенными заявками для строго сбалансированных игр. Каждый игрок i может поставить заявку $0 < p_i < V_N - V_{-i}$, которая будет блокировать все коалиции с ненулевым выигрышем, не содержащие игрока i , т.е., поставив такую заявку, игрок получает гарантию того, что если образуется коалиция, то она обязательно будет содержать этого игрока, и при этом игрок получит выигрыш $u_i = p_i$.

Но, как и для игр трех лиц, такая блокирующая заявка не дает гарантии, что игрок получит этот выигрыш, т.е. может так оказаться, что в интервале времени $(0; T)$ не будет заключена ни одна коалиция.

2.5.1 Вычисление N-ядра

Значение N-ядра вычисляется как распределение выигрыша, на котором степень неудовлетворённости самых неудовлетворенных коалиций, измеряемая величиной их эксцесса, будет наименьшей [36].

Обозначим через $e(x)$ для каждого допустимого распределения выигрышей x в кооперативной игре (N, V) вектор эксцессов всех коалиций, с элементами, упорядоченными по возрастанию. Напомним, что эксцесс – это разница между выигрышем коалиции и значением характеристической функции: $\sigma(S) = x(S) - V(S)$, $S \subseteq N$.

N-ядром кооперативной игры называется точка x , соответствующая минимуму отношения лексикографического порядка на множестве всевозможных векторов $e(x)$ для x принадлежащих множеству дележей игры.

Вычислить N-ядро можно следующим способом. Основная идея нахождения N-ядра – это максимизация минимального эксцесса: $\min_S (\sigma(S)) \rightarrow \max_x$.

Обозначим множество дележей кооперативной игры следующим образом: $D = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = V_N, x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n \right\}$. Тогда задачу нахождения N-ядра можно решить следующим итерационным методом.

Пусть $D_0 = D$ – множество дележей, а $\Omega_0 = 2^N \setminus N$ – множество собственных коалиций. Тогда на первом шаге мы находим подмножество дележей, на котором достигается искомый максимум: $D_1 = \arg \max_{x \in D_0} \left[\min_{S \in \Omega_0} (\sigma(S)) \right]$. Далее исключаем из рассмотрения коалиции, на которых достигается минимум эксцессов:

$\Omega_1 = \Omega_0 \setminus \left(\arg \min_{S \in \Omega_0} (\sigma(S)) \mid x \in D_1 \right)$. Итерационный процесс вычисления

$D_{k+1} = \arg \max_{x \in D_k} \left[\min_{S \in \Omega_k} (\sigma(S)) \right]$ и $\Omega_{k+1} = \Omega_k \setminus \left(\arg \min_{S \in \Omega_k} (\sigma(S)) \mid x \in D_{k+1} \right)$ необходимо про-

должать до тех пор, пока при некотором значении k множество D_k не станет точкой. Это и будет искомым значением N-ядра. Этот процесс завершится в худшем случае за $n-1$ шаг, т.к. на каждой итерации размерность множества

D_k уменьшается хотя бы на единицу, а размерность множества дележей равна $n-1$.

На самом деле исключаемые коалиции (те, на которых достигается минимум эксцессов) являются сбалансированными покрытиями. Напомним, что сбалансированное покрытие – это такое распределение на множестве коалиций $\alpha: 2^N \rightarrow [0;1]$, $\sum_{S \subset N: i \in S} \alpha(S) = 1, \forall i \in N$, что выполнено условие $\sum_{S \subset N} \alpha(S)V(S) \leq V(N)$.

Поэтому поиск минимума эксцессов сводится на каждом шаге к поиску ключевого покрытия.

2.5.2 Алгоритм вычисления N-ядра для игр с нулевыми выигрышами малых коалиций

Теперь приступим к вычислению N-ядра для произвольной игры с нулевыми выигрышами малых коалиций. Напомним, что произвольная такая игра задается n параметрами – выигрышами промежуточных коалиций $0 < V_{-n} \leq \dots \leq V_{-1} \leq V_N$, где V_N можно считать нормировочным коэффициентом.

Теорема 2.7 (о вычислении N-ядра)

Для игр $n \geq 3$ лиц с нулевыми выигрышами малых коалиций N-ядро вычисляется как функция параметров $\{V_{-i}\}$. Причем пространство значений $\{V_{-i}\}$ делится на (2^{n-1}) областей, в каждой из которых все компоненты N-ядра вычисляются линейными функциями параметров $\{V_{-i}\}$.

Каждая область $\{M^m\}^{m=1, \dots, 2^{n-1}}$ задается в виде условий (см. таблицу 1)

$$M^1 = \{V \in M \mid f^1(V) \geq 0\},$$

$$M^m = \{V \in M \mid f^{m-1}(V) \leq 0, f^m(V) \geq 0\}, m = 2, \dots, n-1,$$

$$M^n = \{V \in M \mid f^{n-1}(V) \leq 0, f^n(V) \geq 0\},$$

$$M^{2^{n-m}} = \{V \in M \mid f^{2^{n-m}-1}(V) \leq 0, f^{2^{n-m}}(V) \geq 0\}, m = 2, \dots, n-1,$$

$$M^{2^{n-1}} = \{V \in M \mid f^{2^{n-2}}(V) \leq 0\},$$

где $\{f^m(V)\}_{m=1,\dots,2n-2}$ набор из $(2n-2)$ функций, удовлетворяющий условиям

$$f^m(V) = 2\Sigma_{-N} - \sum_{j=1}^m V_{-j} - (n-m)V_{-m} - (n-2)V_N, m=1,\dots,n-1$$

$$f^{2n-1-m}(V) = \sum_{j=1}^m V_{-j} + (n-m)V_{-m} - (n-2)V_N, m=1,\dots,n-1$$

Обозначим $x_{nucl}^m = \{x_1^m, \dots, x_n^m\}, m=1, \dots, 2n-1$ значения N-ядер в каждой из областей $\{M^m\}_{m=1,\dots,2n-1}$. Тогда значения задаются следующими формулами (см. таблицу 2).

$$\begin{cases} x_i^m = \frac{1}{2}(V_N - V_{-i}), m=2, \dots, 2n-2, i=1, \dots, m-1; \\ x_i^m = \frac{1}{2(n-m+1)} \left[2\Sigma_{-N} - \sum_{j=1}^{m-1} V_{-j} - (m-3)V_N \right] - V_{-i}, m=1, \dots, n-1, i=m, \dots, n; \\ x_i^{2n-m} = \frac{1}{2(n-m+1)} \left[\sum_{j=1}^{m-1} V_{-j} - (m-3)V_N \right], m=1, \dots, n-1, i=m, \dots, n; \\ x_n^n = \frac{1}{2} [\Sigma_{-N} - V_{-n} - (n-3)V_N]. \end{cases}$$

Теорема 2.7 (окончание)

Доказательство теоремы 2.7

Для N-ядра минимум эксцессов всегда достигается на некотором сбалансированном покрытии [34]. Для игр с нулевыми играми малых коалиций множество возможных сбалансированных покрытий уменьшается всего до $(n+2)$ возможных вариантов. Первое – покрытие состоит из индивидуальных коалиций $\Pi_0 = \{i\}_{i=1,\dots,n}$. Второе – $(n-1)$ -кратное покрытие, состоящее из всех дополняющих коалиций $\Pi_{n+1} = \{N \setminus i\}_{i=1,\dots,n}$. И, наконец, n покрытий, состоящих из пар «игрок – дополняющая коалиция» $\Pi_i = \{i, N \setminus i\}, i=1, \dots, n$. Все другие покрытия содержат хотя бы одну коалицию с нулевым выигрышем, а эксцесс такой коалиции мажорируется эксцессом индивидуальной коалицией.

Для начала определим дополнительную функцию $f^0(V) = \Sigma_{-N} - (n-2)V_N$. Достаточно легко убедиться, что верны соотношения

$$f^1(V) \leq \dots \leq f^{n-1}(V) \leq f^0(V) \leq f^n(V) \leq \dots \leq f^{2n-2}(V), \forall V \in M. \quad (2.11)$$

Например $f^n(V) - f^0(V) = f^0(V) - f^{n-1}(V) = V_{-(n-1)} - V_{-n} \geq 0, \forall V \in M$.

Обозначим через $\sigma(\Pi)$ максимально возможный эксцесс некоторого покрытия Π . Рассмотрим первый шаг вычисления N -ядра. Посчитаем максимально возможные эксцессы всех покрытий. Вспомним, что эксцессы индивидуальных коалиций равны значениям выигрышей: $\sigma(i) = x_i, i = 1, \dots, n$, а эксцессы дополняющих коалиций определяются по формулам: $\sigma(N \setminus i) = (V_N - x_i) - V_{-i}, i = 1, \dots, n$. Максимально возможные эксцессы определяются из условий равенства эксцессов всех коалиций покрытия:

$$\begin{aligned} \sigma^1(\Pi_0) &= \frac{1}{n} V_N; \\ \sigma^1(\Pi_i) &= \frac{1}{2} (V_N - V_{-i}), i = 1, \dots, n; \\ \sigma^1(\Pi_{n+1}) &= \frac{1}{n} ((n-1)V_N - \Sigma_{-N}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Можно заметить, что минимальным эксцессом второй строчки (2.12) является эксцесс $\sigma^1(\Pi_1)$. Сравнивая полученные эксцессы между собой, получаем соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma^1(\Pi_1) \geq \sigma^1(\Pi_{n+1}) &\Leftrightarrow f^1(V) \geq 0; \\ \sigma^1(\Pi_0) \geq \sigma^1(\Pi_{n+1}) &\Leftrightarrow f^0(V) \geq 0; \\ \sigma^1(\Pi_0) \geq \sigma^1(\Pi_1) &\Leftrightarrow f^{2n-2}(V) \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что в области M^1 на первом шаге минимум эксцессов достигается на покрытии Π_{n+1} и все компоненты N -ядра определяются за один шаг и вычисляются из условий $\sigma(N \setminus i) = \sigma(N \setminus j), \forall i, j = 1, \dots, n$. В области M^{2n-1} на первом шаге минимум эксцессов достигается на покрытии Π_0 и все компоненты N -ядра определяются за один шаг и вычисляются из условий $x_i = x_j, \forall i, j = 1, \dots, n$. В областях M^2, \dots, M^{2n-2} на первом шаге минимум эксцессов достигается на покрытии Π_1 и первая компонента N -ядра определяется из условия $x_1 = \sigma(N \setminus 1)$. Геометрически доказанные утверждения подтверждают правильность заполнения первой и последней строк, а также первого столбца таблицы векторов N -ядер.

Далее по индукции будем доказывать корректность заполнения таблицы векторов N -ядер для строк m , $2n-m$ и столбца m ($m=2, \dots, n-1$). По предположению индукции первые и последние $m-1$ строк заполнены, а также вычислены значения первых $m-1$ компонент искомого вектора. Здесь в качестве минимальных сбалансированных покрытий выступает аналогичная тройка: набор индивидуальных коалиций $\Pi_0 = \{i\}_{i=1, \dots, n}$, $(n-1)$ -кратное покрытие, состоящее из всех дополняющих коалиций $\Pi_{n+1} = \{N \setminus i\}_{i=1, \dots, n}$, и, наконец, наименьшее парное покрытие $\Pi_m = \{m, N \setminus m\}$. Теперь найдем максимально возможные эксцессы покрытий (из условий равенства эксцессов всех коалиций покрытия):

$$\begin{aligned} \sigma^m(\Pi_0) &= \frac{1}{2(n-m+1)} \left(\sum_{j=1}^{m-1} V_{-j} - (m-3)V_N \right); \\ \sigma^m(\Pi_m) &= \frac{1}{2}(V_N - V_{-m}); \\ \sigma^m(\Pi_{n+1}) &= \frac{1}{2(n-m+1)} \left(\sum_{j=1}^{m-1} V_{-j} - 2\Sigma_{-N} + (2n-m-1)V_N \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Теперь сравним полученные эксцессы и найдем минимальный из них во всех возможных случаях:

$$\begin{aligned} \sigma^m(\Pi_m) \geq \sigma^m(\Pi_{n+1}) &\Leftrightarrow f^m(V) \geq 0; \\ \sigma^m(\Pi_0) \geq \sigma^m(\Pi_{n+1}) &\Leftrightarrow f^0(V) \geq 0; \\ \sigma^m(\Pi_0) \geq \sigma^m(\Pi_m) &\Leftrightarrow f^{2n-m-1}(V) \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что в области M^m на m -м шаге минимум эксцессов достигается на покрытии Π_{n+1} и все компоненты N -ядра определяются за m шагов и вычисляются из условий $\sigma(N \setminus i) = \sigma(N \setminus j), \forall i, j = m, \dots, n$. В области M^{2n-m} на m -м шаге минимум эксцессов достигается на покрытии Π_0 и все компоненты N -ядра определяются за m шагов и вычисляются из условий $x_i = x_j, \forall i, j = m, \dots, n$. В областях $M^{m+1}, \dots, M^{2n-m-1}$ на m -м шаге минимум эксцессов достигается на покрытии Π_m и m -я компонента N -ядра определяется из условия $x_m = \sigma(N \setminus m)$. Геометрически доказанные утверждения подтверждают

правильность заполнения m -й и $(2n-m)$ -й строк, а также m -го столбца таблицы векторов N -ядер.

Итак, по индукции мы доказали корректность заполнения всей таблицы, кроме одной последней ячейки в центральной строке. Но эта компонента N -ядра в области M^n может быть легко вычислена по формуле $x_n^n = V_N - \sum_{j=1}^{n-1} x_j$, т.к.

N -ядро является дележом.

Доказательство (окончание)

	$2\Sigma_{-N} - nV_{-1}$ $> (n-2)V_N$	$2\Sigma_{-N} - V_{-1} - (n-1)V_{-2}$ $> (n-2)V_N$	$2\Sigma_{-N} - V_{-1} - V_{-2} - (n-2)V_{-3}$ $> (n-2)V_N^*$...	$V_{-1} + V_{-2} + (n-2)V_{-3}$ $> (n-2)V_N^*$	$V_{-1} + (n-1)V_{-2}$ $> (n-2)V_N$	nV_{-1} $> (n-2)V_N$
1	Да	Да	Да	...	Да	Да	Да
2	Нет	Да	Да	...	Да	Да	Да
3*	Нет	Нет	Да	...	Да	Да	Да
...
n	Нет	Нет	Нет	...	Да	Да	Да
...
$2n-3^*$	Нет	Нет	Нет	...	Нет	Да	Да
$2n-2$	Нет	Нет	Нет	...	Нет	Нет	Да
$2n-1$	Нет	Нет	Нет	...	Нет	Нет	Нет

Таблица 2.1. Области для игры $n \geq 3$ лиц (* только при $n \geq 4$)

	x_1	x_2	x_3^*	...	x_n
1	$\frac{1}{n}(\Sigma_{-N} + V_N) - V_{-1}$	$\frac{1}{n}(\Sigma_{-N} + V_N) - V_{-2}$	$\frac{1}{n}(\Sigma_{-N} + V_N) - V_{-3}$...	$\frac{1}{n}(\Sigma_{-N} + V_N) - V_{-n}$
2	$\frac{1}{2}(V_N - V_{-1})$	$\frac{1}{2(n-1)}(2\Sigma_{-N} - V_{-1} + V_N) - V_{-2}$	$\frac{1}{2(n-1)}(2\Sigma_{-N} - V_{-1} + V_N) - V_{-3}$...	$\frac{1}{2(n-1)}(2\Sigma_{-N} - V_{-1} + V_N) - V_{-n}$
3*	$\frac{1}{2}(V_N - V_{-1})$	$\frac{1}{2}(V_N - V_{-2})$	$\frac{1}{2(n-2)}(2\Sigma_{-N} - V_{-1} - V_{-2}) - V_{-3}$...	$\frac{1}{2(n-2)}(2\Sigma_{-N} - V_{-1} - V_{-2}) - V_{-n}$
...
n	$\frac{1}{2}(V_N - V_{-1})$	$\frac{1}{2}(V_N - V_{-2})$	$\frac{1}{2}(V_N - V_{-3})$...	$\frac{1}{2}(\Sigma_{-N} - V_{-n} - (n-3)V_N)$
...

$2n-3$ *	$\frac{1}{2}(V_N - V_{-1})$	$\frac{1}{2}(V_N - V_{-2})$	$\frac{1}{2(n-2)}(V_{-1} + V_{-2})$...	$\frac{1}{2(n-2)}(V_{-1} + V_{-2})$
$2n-2$	$\frac{1}{2}(V_N - V_{-1})$	$\frac{1}{2(n-1)}(V_N + V_{-1})$	$\frac{1}{2(n-1)}(V_N + V_{-1})$...	$\frac{1}{2(n-1)}(V_N + V_{-1})$
$2n-1$	$\frac{1}{n}V_N$	$\frac{1}{n}V_N$	$\frac{1}{n}V_N$...	$\frac{1}{n}V_N$

Таблица 2.2. Значения векторов для игры $n \geq 3$ лиц (* только при $n \geq 4$)

2.5.2.1 Три игрока

Любую игру 3 лиц можно привести к игре с нулевыми выигрышами малых коалиций, при условии, что выигрыши парных коалиций будут меньше единицы.

Обозначим ненулевые выигрыши:

$$a = V_{-3},$$

$$b = V_{-2},$$

$$c = V_{-1},$$

$$d = V_N.$$

	$2a + 2b - c > d$	$2a + c > d$	$2b + c > d$	$3c > d$
1	Да	Да	Да	Да
2	Нет	Да	Да	Да
3	Нет	Нет	Да	Да
4	Нет	Нет	Нет	Да
5	Нет	Нет	Нет	Нет

Таблица 2.3. Области для игры трех лиц

	x_1	x_2	x_3
1	$\frac{1}{3}(a+b+c+d)$	$\frac{1}{3}(a+b+c+d) - b$	$\frac{1}{3}(a+b+c+d) - a$
2	$\frac{1}{2}(d-c)$	$\frac{1}{4}(2a+2b+c+d) - b$	$\frac{1}{4}(2a+2b+c+d) - a$
3	$\frac{1}{2}(d-c)$	$\frac{1}{2}(d-b)$	$\frac{1}{2}(b+c)$
4	$\frac{1}{2}(d-c)$	$\frac{1}{4}(d+c)$	$\frac{1}{4}(d+c)$
5	$\frac{1}{3}d$	$\frac{1}{3}d$	$\frac{1}{3}d$

Таблица 2.4. Значения векторов для игры трех лиц

Полученный результат с точностью до обозначений совпадает с результатом, полученным в работе [34].

2.5.2.2 Четыре игрока

Обозначим ненулевые выигрыши коалиций для игры 4 лиц:

$$a = V_{-4},$$

$$b = V_{-3},$$

$$c = V_{-2},$$

$$d = V_{-1},$$

$$e = V_N.$$

	$2a + 2b + 2c - 2d > 2e$	$2a + 2b - c + d > 2e$	$2a + c + d > 2e$	$2b + c + d > 2e$	$3c + d > 2e$	$4d > 2e$
1	Да	Да	Да	Да	Да	Да
2	Нет	Да	Да	Да	Да	Да
3	Нет	Нет	Да	Да	Да	Да
4	Нет	Нет	Нет	Да	Да	Да
5	Нет	Нет	Нет	Нет	Да	Да
6	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Да
7	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет

Таблица 2.5. Области для игры четырех лиц

	x_1	x_2	x_3	x_4
1	$\frac{1}{4}(a+b+c+d+e)-d$	$\frac{1}{4}(a+b+c+d+e)-c$	$\frac{1}{4}(a+b+c+d+e)-b$	$\frac{1}{4}(a+b+c+d+e)-a$
2	$\frac{1}{2}(e-d)$	$\frac{1}{6}(2a+2b+2c+d+e)-c$	$\frac{1}{6}(2a+2b+2c+d+e)-b$	$\frac{1}{6}(2a+2b+2c+d+e)-a$
3	$\frac{1}{2}(e-d)$	$\frac{1}{2}(e-c)$	$\frac{1}{4}(2a+2b+c+d)-b$	$\frac{1}{4}(2a+2b+c+d)-a$
4	$\frac{1}{2}(e-d)$	$\frac{1}{2}(e-c)$	$\frac{1}{2}(e-b)$	$\frac{1}{2}(b+c+d-e)$
5	$\frac{1}{2}(e-d)$	$\frac{1}{2}(e-c)$	$\frac{1}{4}(c+d)$	$\frac{1}{4}(c+d)$
6	$\frac{1}{2}(e-d)$	$\frac{1}{6}(e+d)$	$\frac{1}{6}(e+d)$	$\frac{1}{6}(e+d)$
7	$\frac{1}{4}e$	$\frac{1}{4}e$	$\frac{1}{4}e$	$\frac{1}{4}e$

Таблица 2.6. Значения векторов для игры четырех лиц

2.5.3 Дополнительные исследования игр с нулевыми играми малых коалиций

В этом разделе будут представлены результаты для некоторых частных случаях игр с нулевыми выигрышами малых коалиций.

Утверждение 2.7 (без доказательства)

Для строго сбалансированных игр с нулевыми выигрышами малых коалиций прямая проекция крайней вершины большого предъядра $(V_N - V_{-1}, \dots, V_N - V_{-n})$ на плоскость дележей $(x^{(N)} = V_N)$, вычисляется по формуле $\left(\frac{\Sigma_{-N} + V_N}{n} - V_{-1}, \dots, \frac{\Sigma_{-N} + V_N}{n} - V_{-n} \right)$ и совпадает с N-ядром в случае, когда выполнено следующее соотношение $2\Sigma_{-N} - nV_{-1} \geq (n-2)V_N$.

Утверждение 2.8 (без доказательства)

Для строго сбалансированных игр с нулевыми выигрышами малых коалиций большое предъядро является симплексом в том и только в том случае, когда $\Sigma_{-N} - V_{-1} \geq (n-2)V_N$.

Утверждение 2.9 (без доказательства)

Для строго сбалансированных игр с нулевыми выигрышами малых коалиций в случае, когда большое предъядро является симплексом, проекция вершины симплекса на плоскость дележей совпадает с N-ядром.

2.6 Метрика в пространстве дележей

Обозначим множество дележей для игры n лиц:

$$D^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = V_N, x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n \right\}.$$

Введем метрику на D^n .

$$\forall x, y \in D^n : M(x, y) \equiv M_{xy} = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|.$$

Возможно ввести и другую метрику на D^n , используя индекс Лузмора – Хэндби [9].

$$\forall x, y \in D^n : L(x, y) \equiv L_{xy} = \frac{1}{2} \sum_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|.$$

Основным преимуществом данных метрик является тот факт, что на множестве дележей расстояние между любой парой точек принимает значения на отрезке $[0; V(N)]$, причем значение $V(N)$ достигается. Далее приведем два несложных утверждения.

Утверждение 2.10

В трехмерных играх метрики L и M совпадают:

$$\forall x, y \in D^3 : M_{xy} = L_{xy}.$$

Утверждение 2.11

Для игр с нулевыми выигрышами малых коалиций если $V_{-i} = \frac{n-2}{n} V_N, \forall i=1, \dots, n$, то С-ядро игры представимо в следующем виде:

$$Core = \left\{ x : M(x, Nucl) \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Последнее утверждение можно использовать как сигнал к использованию именно метрику M_{xy} в качестве основной в пространстве дележей. Метризация пространства дележей понадобится в главе 4 для анализа результатов экспериментов. Второй плюс такой метрики заключается в том, что N-ядро всегда принадлежит центру С-ядра в смысле данной метрики. Это следует из первого шага вычисления N-ядра.

2.7 Основные результаты главы 2

Главным объектом исследования второй главы является динамическая кооперативная игра, получаемая из кооперативной функции с помощью аукциона с наведенными заявками.

В данной главе вводятся новые понятия кооперативной теории игр, большое и малое предъядра, а также доказываются критерии их не пустоты.

На основе введенных понятий описываются множества достижимости в динамической кооперативной игре и блокирующих состояния.

Наряду с исследованием произвольной динамической кооперативной игры, выделяется новый класс кооперативных игр с нулевыми выигрышами малых коалиций. Данный класс исследуется более детально, в частности, аналитически решается задача нахождения N -ядра.

Глава 3 Программный комплекс для проведения экспериментов

Существует несколько подходов к изучению рыночных механизмов. Одним из наиболее популярных методов анализа экономических ситуаций и рыночных взаимодействий является теоретико-игровой подход. В рамках данной работы такой подход применяется в главах 1 и 2 для анализа динамических проектных игр с наведенными заявками.

Другим способом исследования эффективности рыночных механизмов является подход экспериментальной экономики, основной идеей которого является создание лабораторных рынков. Такой подход активно применяется в лаборатории экспериментальной экономики МФТИ и ВЦ РАН. Основная идея такого подхода состоит в построении модельной ситуации в лаборатории, оборудованной компьютерным классом с последующим анализом поведения мотивированных участников экспериментов.

3.1 Предпосылки создания программного комплекса

Существуют несколько программных оболочек для эффективного создания различных классов лабораторных экономических ситуаций на сети компьютеров (локальной или Интернете). В лаборатории экспериментальной экономики МФТИ и ВЦ РАН наиболее популярными оболочками для проведения экспериментов являются «z-Tree» и «FTS».

Программная оболочка «z-Tree» [5, 6] разработана в Цюрихском Университете (Швейцария). Она является средой программирования практически любых дискретных экономических ситуаций. Под дискретной экономической ситуацией понимается игра, где игроки одновременной и независимо делают свои ходы, а затем программа диспетчер собирает действия-ходы игроков и на их основе выдает решение и начисляются выигрыши игрокам. Такие игры могут быть как одношаговыми, так и многошаговыми.

Программная оболочка «FTS» [54] разработана в Университете Карнеги Меллон (США). Она является симулятором финансовой торговой системы [30, 37] и предназначена для проведения лабораторных экспериментов, использующих открытый непрерывный двойной аукцион. Основная идея проведения аукциона – создание множества независимых рынков отдельных ценных бумаг.

В 2006-2007 гг. в лаборатории экспериментальной экономики МФТИ и ВЦ РАН проводились серии экспериментов по изучению модельного сетевого рынка. Данный лабораторный рынок получил название «сетевой газовый рынок TRUE» [31, 32]. Основной целью экспериментов было экспериментальное сравнение трех различных аукционных механизмов: сетевого аукционного механизма с диспетчером, двойного сетевого аукциона с производными контрактами и сетевого аукциона с наведенными заявкам.

Первый механизм – сетевой аукцион с диспетчером. Основной особенностью сетевого аукциона с диспетчером является использование механизма централизованного сбора закрытых заявок программой-диспетчером, которая решает задачу максимизации некоторого заданного функционала выигрыша. Пример использования такого аукциона можно найти, например, в работе [10]. Программная оболочка «z-Tree» удовлетворяет всем необходимым требованиям для создания подобного рода лабораторных аукционов.

Второй механизм – непрерывный двойной аукцион. Основные требования этого аукциона – обеспечить работу системы в реальном времени, чтобы без задержек отображать состояние торговой сессии, и удобный пользовательский интерфейс, чтобы минимизировать не вынужденные ошибки участников аукциона. Пример использования финансового рынка для моделирования сетевого можно найти, например, в работе [29]. Как уже было сказано, идеальной оболочкой для проведения лабораторных игр с использованием финансовых рынков является «FTS».

Третий механизм – аукцион с наведенными заявками [41, 43]. Сетевой аукционный механизм с наведенными заявками по отношению к предыду-

щим можно назвать компромиссным вариантом, сочетающим в себе прозрачность ценообразования и организованность взаимодействия участников аукциона. Основная идея аукциона с наведенными заявками состоит в том, что для каждого агента совокупность заявок всех остальных агентов порождает для него встречную заявку. В основе работы данного торгового механизма лежит составление для каждого агента наведенных заявок по совокупности заявок остальных со своей заявкой. Это позволяет каждому агенту работать только на одном рынке. Прозрачность ценообразования сохраняется, поскольку всегда можно либо согласиться с наведенной заявкой, либо изменить свою, продолжая торг с виртуальным партнером. Роль диспетчера в данном механизме сводится к корректному распространению наведенных заявок.

Обе вышеупомянутые оболочки оказываются непригодными для создания лабораторных игр с наведенными заявками. Программа «z-Tree» непригодна для игр в непрерывном времени. Программа «FTS» не позволяет создавать приватные рынки с непрерывными двойными аукционами, а также в ней не предусмотрено возможности централизованного сбора заявок, т.е. все созданные им финансовые рынки являются независимыми.

Итак, одной из целей настоящей работы стало создание программного комплекса для проведения лабораторных сетевых аукционов с наведенными заявками.

3.2 Требования к реализации

Основное требование к программной реализации аукциона – это создание полноценной программной оболочки для проведения лабораторных экспериментов. Это означает, что с помощью нее можно будет провести не только одну или несколько серий заданных экспериментов, а она должна позволять проводить любые эксперименты, допускающие лабораторное представление экономических аукционов с наведенными заявками.

Как видно из главы 1 аукцион с наведенными заявками применим не только к сетевым рынкам, но и к более широкому классу экономических ситуаций – проектным играм.

Аукцион с наведенными заявками, сочетая в себе плюсы остальных механизмов, предъявляет более жесткие требования к программной реализации. С одной стороны он требует в режиме реального времени обрабатывать сетевые запросы и производить сложные рыночные расчеты, а с другой обеспечивать удобный пользовательский интерфейс.

Программный комплекс для проведения сетевых аукционов должен состоять из прикладного сервера и множества клиентских модулей участников аукциона. Также в некоторых случаях может быть выделен управляющий модуль для оператора аукциона. Основное требование к системе – обеспечение быстрого и надежного сетевого взаимодействия, а также достаточно низкоуровневая работа с ресурсами ЭВМ, позволяющая производить сложные расчеты в режиме реального времени.

Технически работа диспетчера заключается в принятии потока заявок от участников аукциона, перерасчета состояния рынка и выдачи ответа всем участникам. Еще одна особенность механизма с наведенными заявками – все заявки участников должны поступать на обработку строго последовательно. Также в системе должна быть предусмотрена возможность проведения серии последовательных экспериментов – т.е. последовательность единичных экспериментов с заданным правилом изменения параметров.

Для проведения произвольной проектной игры в системе должен быть механизм описания игры в виде входного файла, который будет загружаться в систему для инициализации лабораторного рынка.

Для получения и дальнейшего анализа результатов экспериментов, необходимо, чтобы система вела журнал событий, который должен быть представлен в виде одного или нескольких файлов по окончании экспериментов. В этом журнале должны быть отражены все события, происходившие в системе: все действия игроков и диспетчера.

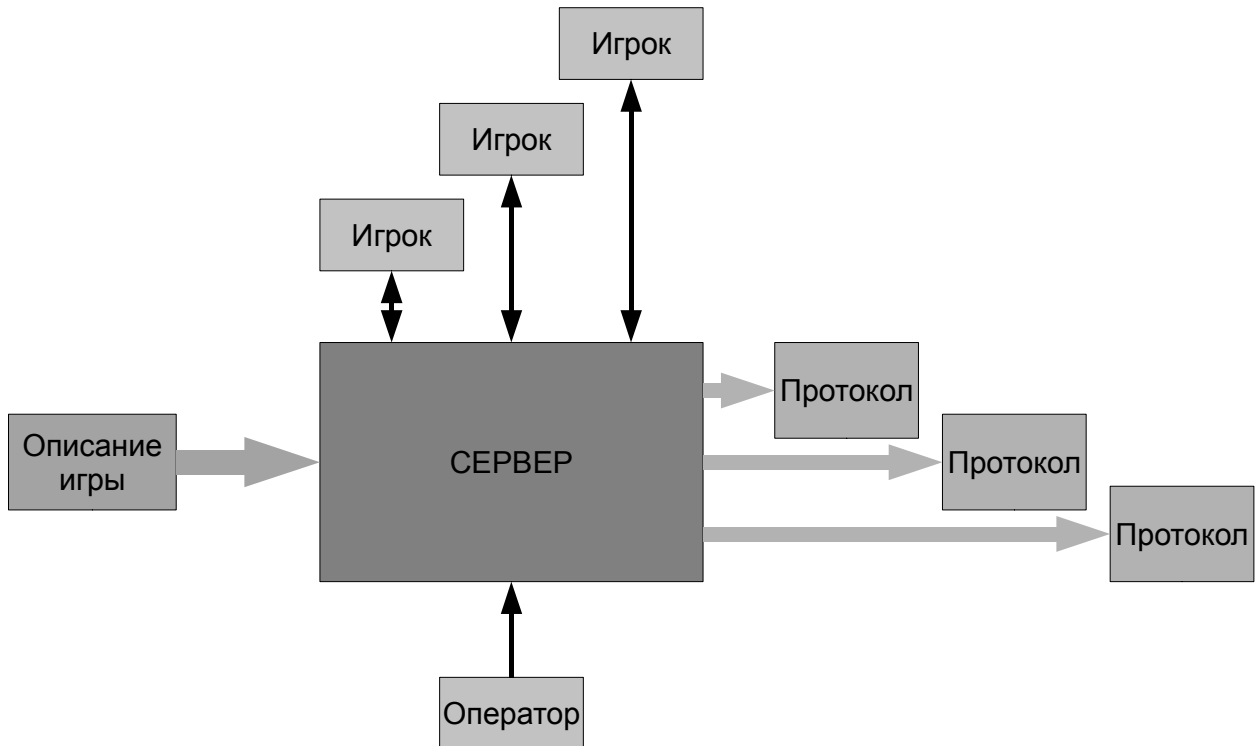


Рисунок 3.1. Общая схема программного комплекса

3.3 Технология Генератор Проектов

В качестве инструментария для создания программного комплекса была выбрана технология «Генератор проектов» [44, 45]. Слово проект в данном случае никак не связано с понятием проектной игры, и совпадение чисто случайно. Кратко опишем основные преимущества Генератора проектов (ГП), описание которого можно найти, например, в работах [24, 53]. Данная технология предназначена для автоматизации разработки программных комплексов, использующих следующие информационные технологии. Многоуровневая клиент-серверная архитектура, удаленные пользовательские рабочие места, режим реального времени выполнения бизнес-процедур, использование реляционных и сетевых структур данных, оконный интерфейс пользовательских приложений, защита информации от несанкционированного доступа – вот основные концепции ГП. Основным механизмом автоматизации является автоматическая генерация текстов программ по формальному описанию проекта разрабатываемой системы.

Теперь остановимся более подробно на использовании преимуществ технологии ГП при разработке программной реализации аукциона с наведенными заявками. Основными участниками аукциона являются диспетчер и игроки. Причем основная функция диспетчера – обеспечение взаимодействия игроков между собой, соблюдая бизнес логику в соответствии с теоретико-игровой моделью. Такая архитектура (клиент-сервер) соответствует основной концепции ГП: прикладной бизнес сервер выполняет функции диспетчера, а клиентские модули раздаются игрокам. Также выделяет еще один клиентский модуль для управления и мониторинга за ходом торгов.

Сетевое взаимодействие между модулями в ГП реализовано таким образом, что прикладная логика работы бизнес сервера осуществляется в одном потоке, что позволяет обрабатывать запросы строго последовательно. Это согласуется с одним из главных постулатов механизма: все заявки участников должны поступать на обработку строго последовательно.

Подсистема информационной безопасности позволяет без искажений передавать данные в сети, в том числе и глобальной. Наличие системы аутентификации позволяет привязывать каждого игрока к его логину и не терять контекст аукциона даже при возможных разрывах связи, а так же оперативно передавать их игроку после успешной повторной аутентификации.

Технически работа диспетчера заключается в принятии потока заявок от участников аукциона, перерасчета состояния рынка и выдачи ответа всем участникам. Такая модель аукциона легко реализуется с помощью штатных средств ГП – запросов и оповещений.

Сложная модель проектной игры может быть описана в рамках технологии ГП посредством сетевой модели данных – базового механизма программирования на Генераторе.

Единственным слабым местом ГП в реализации сетевого аукциона является ограниченный функционал по созданию пользовательского интерфейса. Но технология ГП предоставляет программный интерфейс для разработки внешних модулей, интегрируемых в систему. Таким образом, пользователь-

ский интерфейс был реализован силами студентов (участников экспериментов), который удобен и более привычен для них по другим сетевым аукционам.

Наличие встроенного в ГП лексического анализатора позволило создать язык описания сетевых аукционов, тем самым, позволяя с помощью разработанной системы проводить широкий спектр экспериментов, модель которых укладывается в аукцион с наведенными заявками.

Итогом торгов является набор колоночных файлов с результатами торговых сессий. Встроенная в ГП система протоколирования и формирования журналов позволяет формировать необходимые файлы заданного формата.

В дополнение можно отметить, что сильными сторонами ГП являются обеспечение быстрого и надежного сетевого взаимодействия, а также достаточно низкоуровневая работа с ресурсами ЭВМ, позволяющая производить сложные расчеты в режиме реального времени.

3.4 Сетевая модель данных

Как уже было сказано, основным языком описания сущностей в Генераторе проектов является сетевая модель данных [38]. Сетевое представление проектной игры может быть получено с использованием 4-х объектов типа запись с данными, 1-го объекта запись без данных 4-х сингулярных набора (набора без владельца) и 4-х наборов с владельцами. Четыре записи с данными и соответствующие им сингулярные наборы строятся для 4-х основных структурных единиц проектной игры: проект, операция, агент и игрок. С помощью 2-х наборов с владельцами и одного набора без данных описывается связь проектов и операций типа «многие ко многим». Еще 2 набора служат для описания принадлежности агентов к операциям и игрокам. И, наконец, доходы проектов и затраты агентов задаются в соответствующих записях с данными. Диаграмма сетевой модели данных приведена на рис. 3.2. Под типом операции понимается альтернатива: затратная или прибыльная.

Для упрощения схемы описания проектной игры было введено новая сущность: *позиция* игрока на рынке операции. Позиция – это совокупность всех агентов одного игрока, выполняющих одну и ту же операцию. Такая эквивалентная замена понятий в достаточной мере упрощает внутреннюю организацию программы. Модифицированная сетевая модель проектной игры представлена на рис. 3.3. Чтобы не загромождать диаграмму, названия наборов опущены.

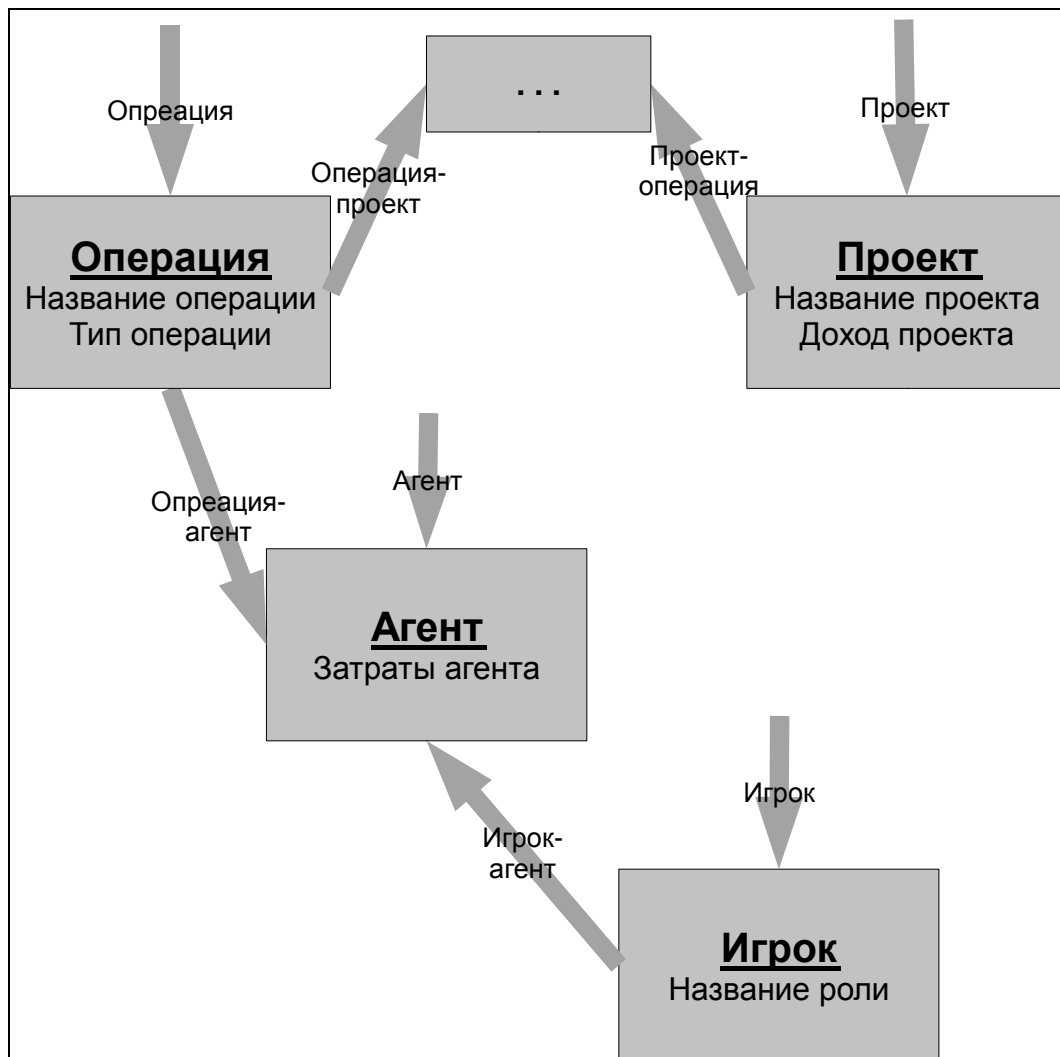


Рисунок 3.2. Основная сетевая модель проектной игры

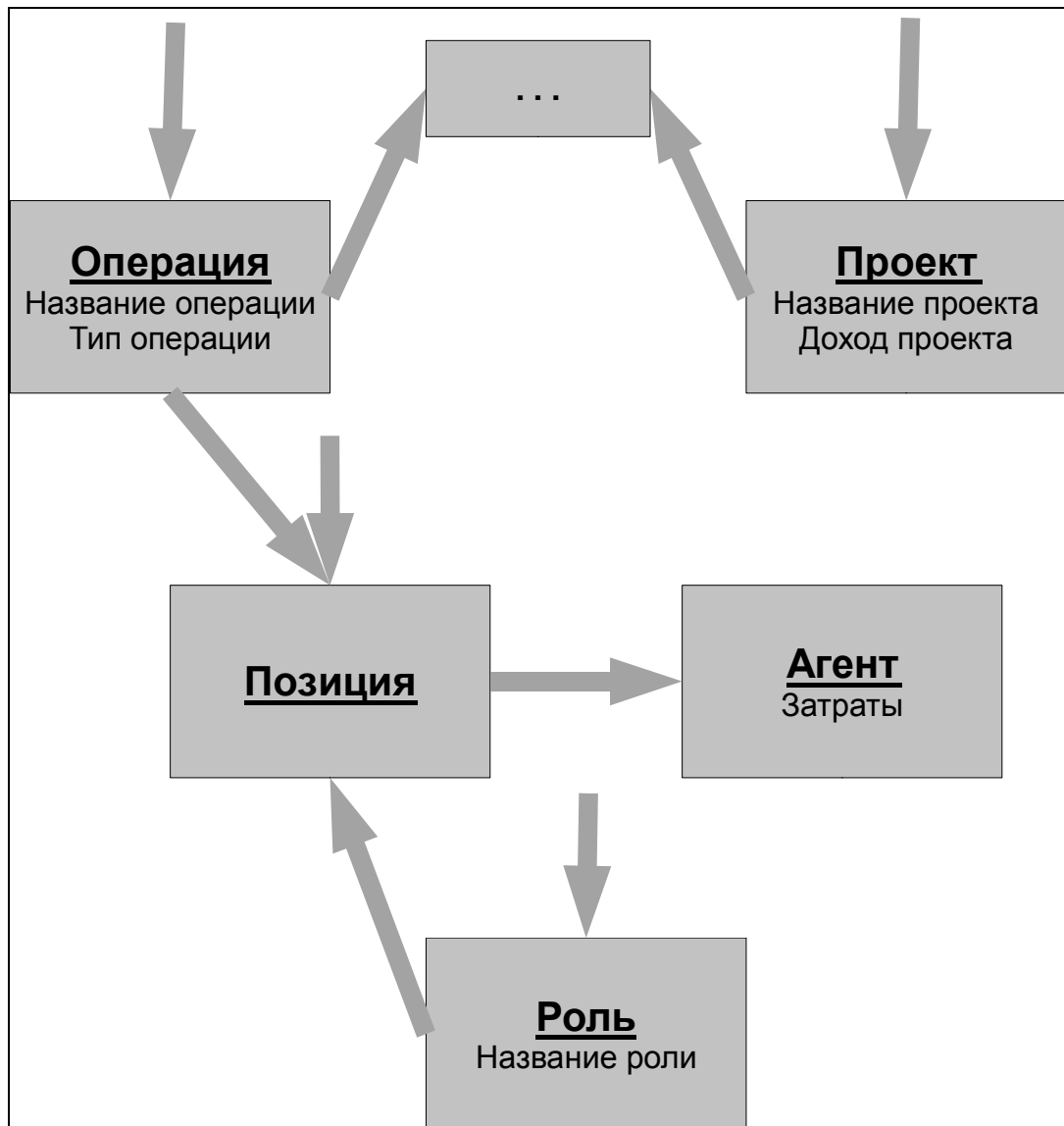


Рисунок 3.3. Модифицированная сетевая модель проектной игры

3.5 Расширение модели для динамической игры

В предыдущем разделе была описана статическая модель проектной игры. Однако, в динамической проектной игре с наведенными заявками в дополнение к модели появляются наборы заявок: простых и наведенных. Простые заявки подаются игроками от лица агентов (в модифицированном случае заявка поступает на позицию). Таким образом, простая заявка должна иметь ссылку на операцию и на игрока (позицию), а также должна содержать номинал заявки. Для удобства в системе предусмотрены кратные заявки, т.е.

заявки с указанием их кратности. Максимальная кратность заявки естественно ограничена количеством активных агентов игрока на данной позиции.

По правилу сравнения для каждой операции можно определить наилучшую простую заявку. По доказанному в главе 1 утверждению, достаточно строить только наилучшую заявку для каждой связной пары «операция-проект» (естественно, такие заявки будут состоять из наилучших простых). Таким образом, у каждой операции есть две упорядоченные очереди заявок: простых и наведенных. Сделки образуются согласно клиринговому механизму, при этом начисляются прибыли агентов и выигрыши игроков.

Сетевая модель динамической проектной игры с наведенными заявками представлена на рис. 3.4.

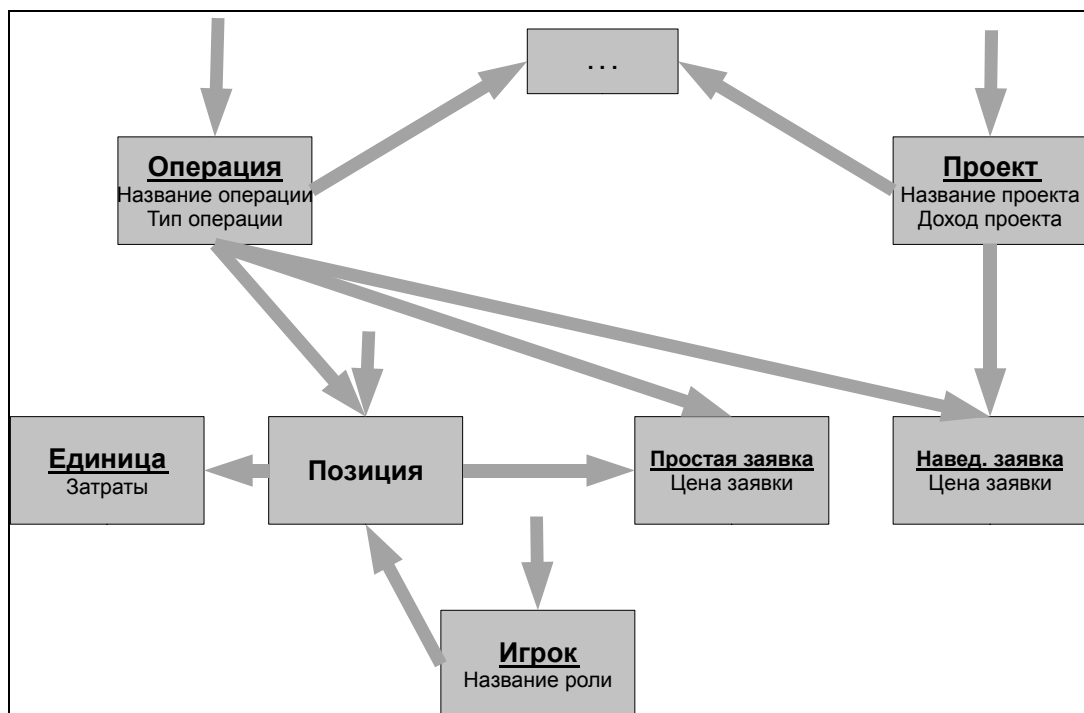


Рисунок 3.4. Сетевая модель динамической проектной игры

Дополнительно необходимо отметить, что все заявки поддаются интерпретации в терминах финансовых рынков. Для затратных операций простые заявки агентов можно интерпретировать как заявку на продажу «ask», а встречные наведенные – как заявку на покупку «bid». Для прибыльных операций заявки меняются местами, причем их номиналы умножаются на коэф-

фициент -1 . Таким образом, получается, что все классические правила непрерывного двойного аукциона оказываются выполненными: наилучшая заявка типа «ask» имеет наименьший номинал, а наилучшая заявка типа «bid» – наибольший номинал. При этом клиринг (сделка) происходит, когда при подаче очередной заявки заявка типа «bid» оказывается больше либо равна заявке типа «ask» на рынке некоторой операции.

3.6 Серия из последовательных игр

На практике лабораторные эксперименты проводят не по одному, а целыми сериями. По этой причине одной из важных задач при создании комплекса стало обеспечение возможности проведения серии экспериментов.

При проведении последовательной серии экспериментов необходимо помимо проектной структуры игры задать правила переходов от попытки к попытке. Определим роль участника эксперимента как игрока в проектной игре. Тогда при переходе от попытки к попытке роль каждого игрока может меняться по заданному правилу, например, оставаться постоянной или меняться случайным образом.

Числовые параметры проектной игры тоже могут меняться при переходах от попытки к попытке. Для этого все эти параметры (доходы проектов и затраты агентов) объявляются переменными. Переменные в программе могут быть одного из трех типов. Первый тип – константа, задается числовым значением. Второй тип – циклическая переменная, задается в виде числового ряда и принимает последовательно все значения ряда. Третий тип переменных – случайная величина с заданным интервалом равномерного распределения. Такой тип переменных может быть использован для моделирования проектных игр с неполной информацией.

3.7 Кратное количество участников

Необходимо отметить еще один важный момент при проведении серии экспериментов. В большинстве случаев количество участников лабораторных экспериментов превышает количество ролей в игре. Для таких случаев в

программе предусмотрена опция клонирования проектной игры. Другими словами, при описании игры задается, сколько независимых копий данной проектной игры нужно создать. Заданное количество аукционов будет сопровождаться в рамках одной сессии.

Еще одним преимуществом данного подхода является тот факт, что при последовательных розыгрышах игр игроки могут случайным образом обмениваться ролями и попадать в другие группы.

Дополнительно, есть возможность проводить так называемые эксперименты с конкуренцией. В таких играх на каждую роль создается несколько игроков, имеющую одинаковые позиции на рынках операций.

3.8 Язык описания проектных игр

Для того чтобы инициализировать эксперимент, используя динамическую проектную игру с наведенными заявками, необходимо создать файл с описанием игры. Описательный файл должен иметь определенную структуру. Это текстовый файл, содержащий заголовок и три секции.

Заголовок файла должен содержать ключевое слово «netmarket», двоеточие и кратность проектной игры – количество независимых проектных рынков. Далее внутри пары фигурных скобок должны последовательно располагаться три секции: переменные, модель проектной игры и общие настройки проводимого эксперимента.

Секция переменных начинается с ключевого слова «var», далее в паре фигурных скобок через символ «;» перечисляются все используемые переменные. Переменные типа «константа» определяются так: ключевое слово «const», уникальный идентификатор переменной, символ «=», число. Циклические переменные определяются через ключевое слово «trial», идентификатор переменной, символ «=», и разделенный запятыми набор чисел в круглых скобках. Случайные переменные определяются через ключевое слово «disp», идентификатор переменной, символ «=», интервал равномерного распределения в виде пары чисел через запятую в квадратных скобках.

Основная секция содержит описание проектной игры. Синтаксическая диаграмма этой секции представлена на рис. 3.5. Сначала идет описание всех рынков игры (по количеству операций). Начинается с ключевого слова «market», далее уникальные идентификатор рынка (операции), символ «:», тип рынка («sell» для затратных операций и «buy» для прибыльных), в конце символ «;». После описания рынков идет описание проектов. Начинается с ключевого слова «project», далее уникальные идентификатор проекта, символ «:», затраты проекта в виде идентификатора описанной выше переменной, в конце символ «;». После описания рынков и проектов располагается описание матрицы инцидентности. Начинается с ключевого слова «projmark», далее уникальные идентификатор проекта, символ «:», уникальные идентификатор рынка, в конце символ «;». При этом идентификаторы проекта и рынка должны быть из списка вышеописанных.

Следующий блок описывает множество ролей в игре. Начинается с ключевого слова «role», далее уникальные идентификатор роли, символ «:», кратность роли (отлична от единицы только для конкурентных проектных игр), в конце символ «;».

Последний блок основной секции файла описания содержит информацию об агента. Как уже было написано, похожие агенты объединяются в позиции. Описание позиции начинается с ключевого слова «position», а далее в фигурных скобках заключено описание позиции игрока на рынке. Сначала задается привязка позиции к рынку: ключевое слово «market», символ «=», далее описанный выше идентификатор рынка, в конце символ «;». Далее задается привязка позиции к роли: ключевое слово «role», символ «=», далее описанный выше идентификатор роли, в конце символ «;». В завершении описания позиции описывается множество агентов. Начинается с ключевого слова «agent», символ «=», далее в круглых скобках затраты агентов в виде идентификаторов описанных выше переменных, в конце символ «;».

Последняя секция отвечает за общие настройки игры. Она начинается с ключевого слова «config», а далее в фигурных скобках определяются основ-

ные параметры игры. Определяются значения основных системных переменных: «timemax» – время торговой сессии (попытки), «timewait» – перерыв между сессиями, и «sessmax» – максимальное количество сессий. Данными переменным присваивается целое положительное значение через символ «=» и разделение символом «;».

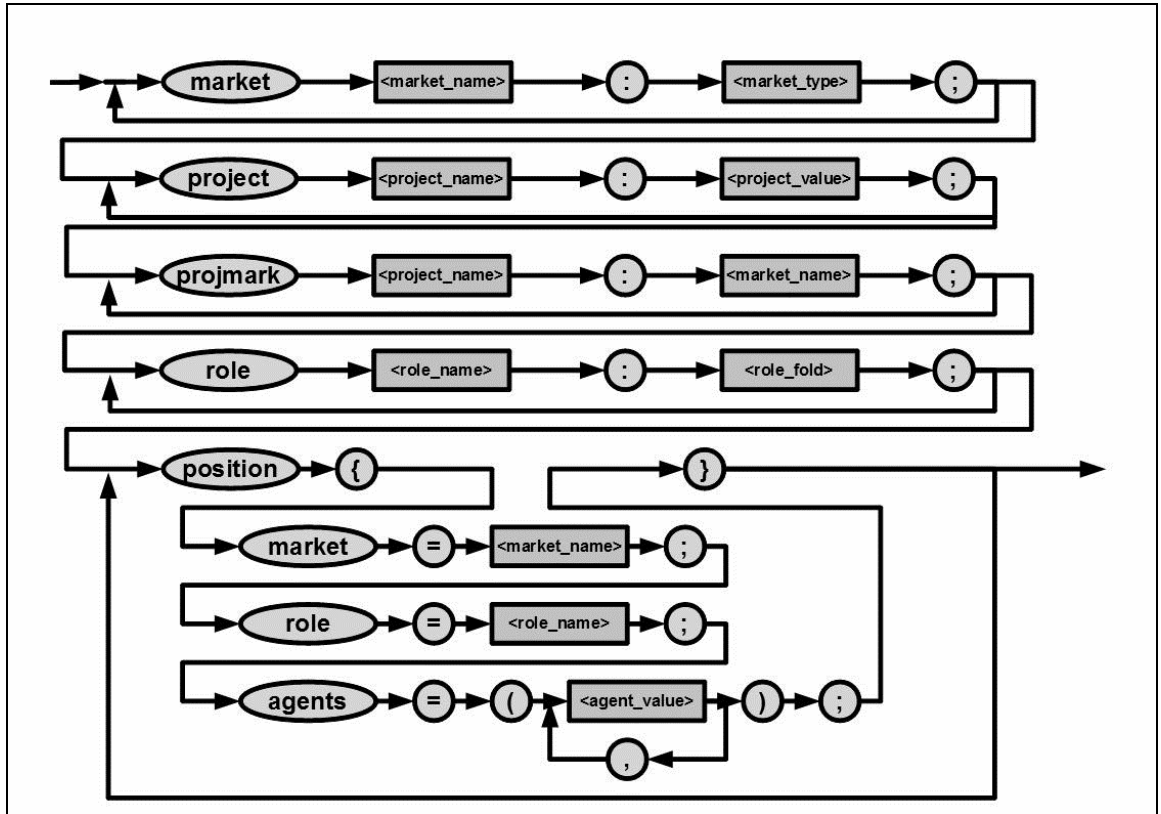


Рисунок 3.5. Синтаксическая диаграмма

3.9 Выходные данные

Основным результатом лабораторного эксперимента является протокол проведенной серии. Он необходим для анализа проведенного эксперимента. Протокол описываемой программы состоит из трех текстовых файлов в колоночном формате. Это удобно для последующего преобразования в нужный формат для аналитической программы.

Первый файл протокола пишется в конце каждой попытки в разрезе игроков и содержит следующую информацию: номер попытки, уникальный идентификатор игрока, ФИО, роль игрока в данной попытке, выигрыш в данной попытке и суммарный накопленный выигрыш.

Во второй файл данные записываются дважды за попытку: в начале и в конце. Данный файл содержит следующую информацию: номер попытки, уникальный идентификатор игрока, наименование операции, затраты для каждого агента, количество нереализованных единиц и выигрыш всех агентов по данной позиции.

Третий протокольный файл является подробным логом всех действий игроков и диспетчера. Поля, отражаемые в протоколе: номер попытки, уникальный идентификатор игрока, наименование операции, действие (заявка или совершение сделки), цена заявки или сделки, выигрыш (только в случае сделки). Дополнительно, для удобства, во время каждого действия отмечается наилучшая пара заявок на рынке данной операции.

3.10 Производительность и надежность

В Лаборатории экспериментально экономики МФТИ и ВЦ РАН было проведено достаточно большое количество экспериментов с динамическими проектными играми с наведенными заявками. Описываемый программный комплекс работал без сбоев. Среди экспериментов был и один с высокой степенью конкуренции. В этом эксперименте количество заявок достигало нескольких заявок в секунду. Несмотря на такую высокую нагрузку, сервер программы в режиме реального времени (без видимых задержек) успевал обрабатывать поток входящих заявок, вычислять наведенные и рассылать актуальные значения наилучших пар заявок.

3.11 Основные результаты главы 3

Третья глава носит, в основном, описательный характер. Главной ценностью является непосредственно сам программный комплекс, переданный в Лабораторию экспериментально экономики МФТИ и ВЦ РАН.

Глава 4 Анализ экспериментов

В Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ и ВЦ РАН было проведено достаточно большое количество лабораторных экспериментов с использованием динамических проектных игр с наведенными заявками. Все эксперименты проводились в рамках курса «Экспериментальная экономика», читаемого студентам старших курсов ФУПМ МФТИ. Во всех экспериментах использовался программный комплекс, описанный в главе 3.

Для анализа были выбраны только несколько самых значимых экспериментов. Основные результаты исследований поведения участников лабораторных экспериментов можно найти в работах [16, 46, 48-51].

4.1 Общий подход к анализу

Для постановки экспериментов выбирается некоторая экономическая ситуация, которая может быть представлена в виде игры с несколькими участниками, имеющими возможность вступать кооперацию. Другими словами, для проведения эксперимента необходимо построить проектную игру.

4.1.1 Описание одной игры (элементарная игра)

В игре участвует группа из заданного количества человек (обычно 3 или 4). Каждый игрок получает одну из ролей, в каждой роли игрок управляет одним или несколькими экономическими агентами. Игроки посредством своих агентов участвуют в непрерывном двойном аукционе с наведенными заявками. Торги обычно длятся от одной до пяти минут. По истечении указанного времени все игроки получают выигрыши согласно правилам (см. главу 1).

4.1.2 Описание серии игр (сценарий последовательности)

Для проведения серии экспериментов необходимо количество участников, кратное количеству ролей в игре. Игроки случайным образом делятся на группы (тройки или четверки), далее внутри каждой группы случайным об-

разом назначаются роли. Сам процесс торгов будем называть попыткой. После окончания очередной попытки делается пауза от 5 до 30 секунд. Процесс разбиения на группы и определение ролей повторяется. Обычно количество попыток находится в пределах от 5 до 20.

4.1.3 Мотивация участников

В экспериментальной экономике принято проводить эксперименты, привлекая мотивированных участников. Обычно для мотивации участников используются денежные вознаграждения. Но также возможна учебная мотивация.

Выигрыши участников это некоторая функция выигрышей игроков во всех попытках. Это могут быть либо денежные вознаграждения, либо учебные очки.

В данном случае во всех сериях использовался именно второй тип поощрения. Но, как показывает практика, такой способ мотивации обычно не снижает общей эффективности поведения игроков.

4.1.4 Постановка эксперимента

Перед началом экспериментов всем участникам раздается инструкция с описанием правил игры. В инструкции освещается общее описание экономической ситуации. Далее описывается механизм взаимодействия участников. После этого рассказывается о правилах переходов от попытки к попытке. И, наконец, оговариваются правила начисления выигрышей.

Для того чтобы удостовериться, что все адекватно поняли правила, оператор эксперимента отвечает на вопросы участников.

4.1.5 Извлечение данных для анализа

Каждое действие (заявка) игроков протоколируется, поэтому в результате проведения экспериментов получаются довольно большие файлы с протоколом хода экспериментов. В них содержится полная информация обо всех действиях игроков и программы-диспетчера за весь период игры.

Для данного анализа выбираются только векторы итоговых выигрышей игроков в каждой «элементарной игре». Сведения обо всех действиях и совершенных сделках с привязкой ко времени опускаются.

Полученный набор векторов будем считать реализациями некоторого случайного вектора. Причем каждая серия это отдельный случайный вектор.

4.1.6 Проблема повторяемости и стационарности

Будем предполагать независимость реализаций случайных векторов. В пользу такого предположения есть несколько аргументов. Для этого сравним наш непрерывный аукцион с закрытым аукционом.

Когда проводится серия игр с закрытыми заявками, то эта серия выступает больше как одна повторяющаяся игра, нежели как последовательность независимых игр. Это происходит вследствие того, что при принятии решения, игрок не имеет никакой информации о текущей игре: он может использовать только опыт предыдущих игр. Таким образом, в каждой серии устанавливается некоторое равновесное поведение игроков.

Рандомизация групп игроков и ролей внутри группы частично решает проблему зависимости последовательных игр, но все равно при большом количестве игр в серии устанавливается коллективное равновесие.

Непрерывный двойной аукцион позволяет (в течение одной игры) каждому игроку взаимодействовать с другими контрагентами, используя рыночные механизмы. То есть игроки в одной группе могут в реальном времени сойтись к некоторому компромиссному исходу. Таким образом, опыт предыдущих игр уходит на второй план для игроков, когда они принимают решение, как действовать.

Рандомизация групп игроков и ролей внутри группы окончательно нивелирует влияние предыдущих игр на текущий розыгрыш.

Приведенные рассуждения, конечно, нельзя считать доказательством независимости испытаний, но в то же время их можно использовать в качестве весомого аргумента в предположении независимости наблюдений.

4.2 Сравнительный анализ кооперативных игр трех лиц

Для исследования свойств аукциона с наведенными заявками была поставлена серия экспериментов. Эксперименты проводились на базе Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ и ВЦ РАН в 2010 году. Участниками эксперимента были студенты 6 курса ФУПМ МФТИ. Результаты анализа можно найти в работах [16, 46, 49-51].

Одной из главных трудностей проведения экспериментов является мотивирование участников. Наиболее распространенный способ мотивации участников – это выплата им денежных вознаграждений в зависимости от достигнутых ими результатов. Существуют и другие способы стимулирования участников.

Анализируемые в данной работе серии экспериментов проводились в рамках учебного курса «Экспериментальная экономика». Мотивация участников обеспечивалась начислением учебных очков, которые влияли на зачетную оценку по данному курсу. В таких условиях отсутствие денежных вознаграждений чаще всего не снижает мотивацию участников.

Напомним, что приведенная кооперативная игра трех лиц однозначно задается тремя числовыми параметрами – выигрышами парных коалиций.

В качестве лабораторных кооперативных игр трех лиц были взяты пять различных характеристических функций с различным размером ядра, оцениваемым параметром κ (см. таблицу 4.1).

	a	b	c	d	κ
I	50	65	70	100	7.5
II	40	50	90	100	10
III	10	65	75	100	25
IV	10	25	45	100	55
V	10	20	30	100	70

Таблица 4.1. Примеры характеристических функций

В работе [34] были выведены формулы вычисления N-ядра для всевозможных характеристических функций для игры трех лиц (см. таблицу 4.2). Можно заметить, что пространство характеристических функций разделяется на пять областей по способу вычисления N-ядра. Вышеуказанные пять наборов параметров выбирались таким образом, чтобы каждый набор попал в одну из этих областей.

	$2a + 2b - c > d$	$2a + c > d$	$2b + c > d$	$3c > d$	x1	x2	x3
I	Да	Да	Да	Да	$\frac{a+b-2c+d}{3}$	$\frac{a+c-2b+d}{3}$	$\frac{c+b-2a+d}{3}$
II	Нет	Да	Да	Да	$\frac{d-c}{2}$	$\frac{2a+c+d-2b}{4}$	$\frac{2b+c+d-2a}{4}$
III	Нет	Нет	Да	Да	$\frac{d-c}{2}$	$\frac{d-b}{2}$	$\frac{c+b}{2}$
IV	Нет	Нет	Нет	Да	$\frac{d-c}{2}$	$\frac{d+c}{4}$	$\frac{d+c}{4}$
V	Нет	Нет	Нет	Нет	$\frac{d}{3}$	$\frac{d}{3}$	$\frac{d}{3}$

Таблица 4.2. Значения N-ядер для кооперативной игры трех лиц

4.2.1 Отличительные особенности аукциона с наведенными заявками и предполагаемое поведение участников

Построенный аукцион с наведенными заявками имеет ряд особенностей. Во-первых, нет гарантии, что исход игры будет дележом, т.е. может реализоваться любая парная коалиция, а также может не реализоваться ни одной коалиции. Если образуется максимальная коалиция, то реализовавшийся дележ будет внутренней точкой ядра.

Во-вторых, в случае высоких выигрышей парных коалиций (маленькое ядро) может возникнуть «эффект первой секунды»: все хотят побыстрее

вступить в любую коалицию, чтобы получить хоть какой-то выигрыш, что может приводить к образованию парных коалиций.

В-третьих, в случае маленьких выигрышей парных коалиций (большое ядро) может возникнуть «эффект последней секунды»: игра входит в некоторое равновесное состояние, когда парные коалиции заведомо невозможны, и все ждут окончания игры в надежде, что контрагенты смягчат свои заявки, что может приводить к бескоалиционному (нулевому) исходу.

4.2.2 Описание экспериментов

Наиболее интересными для анализа представляются три серии экспериментов 19-11-2010, 26-11-2010 и 03-12-2010. Первую обозначим «X», вторую «Y», а третью «Z». В первой серии участвовало 12 человек, а во второй и третьей было по 15 участников, причем большая часть студентов участвовала во всех трех экспериментах.

Игра состояла из последовательных раундов по 60 секунд (длительности начальных раундов были увеличены до 120-180 секунд для того, чтобы участники привыкли к интерфейсу). При розыгрыше каждого раунда игры все участники эксперимента случайным образом разбивались на тройки, а внутри каждой тройки случайным образом распределялись роли. Характеристические функции менялись циклически каждые пять раундов, т.е. в раундах 1-5 была характеристическая функция I, в раундах 6-10 – II и т.д., всего 33 раунда. Таким образом, в первой серии было проведено 132 игры трех лиц, а во второй и третьей сериях – 165.

Перед началом всех серий экспериментов участникам были подробно описаны правила аукциона, алгоритмы смены раундов и способы распределения ролей внутри троек среди участников в каждом раунде. Отличиями в информированности участников было то, что во втором и третьем случаях участникам было рассказано о существовании в данной игре блокирующих стратегий, в третьей была выдана таблица значений N-ядер.

Напомним, что приведенная игра трех лиц является с кооперативной игрой с нулевыми выигрышами малых коалиций, поэтому большое предядро является усеченным параллелепипедом и расщепляется на индивидуальные блокирующие стратегии. А значения N-ядер – это нормативные точки, координаты которых можно вычислить, используя таблицу 4.2.

Итак, степень информированности участников можно наглядно представить в таблице 4.3.

Дата	Кол-во студентов	Кол-во игр 3 лиц	Информированность участников
19-11-2010 (X)	12	132	Правила игры
26-11-2010 (Y)	15	165	Правила игры Блокирующие стратегии
03-12-2010 (Z)	15	165	Правила игры Блокирующие стратегии Значения N-ядер

Таблица 4.3. Информированность участников в кооперативных играх

4.2.3 Анализ влияния информации о блокирующих стратегиях

Для анализа влияния дополнительной информации о блокирующих стратегиях будем сравнивать две серии экспериментов: «X» и «Y».

Распределения реализовавшихся коалиций приведены в таблице 4. Можно заметить, что для характеристической функции I (маленькое ядро) наблюдается 100%-ная реализация коалиций. Также можно отметить, что в случаях IV и V (большое ядро) парные коалиции не образуются. Это согласуется с ожидаемой реализацией коалиций.

Серия	набор	$V(\emptyset) = 0$	$V(1,2) = a$	$V(1,3) = b$	$V(2,3) = c$	$V(1,2,3) = d$	Σ
-------	-------	--------------------	--------------	--------------	--------------	----------------	----------

X	I	0	5	14	11	10	40
X	II	0	1	1	30	0	32
X	III	0	1	11	3	5	20
X	IV	1	0	0	0	19	20
X	V	1	0	0	0	19	20
	Всего						132
Y	I	0	5	7	12	26	50
Y	II	1	0	2	14	23	40
Y	III	2	0	1	1	21	25
Y	IV	3	0	0	0	22	25
Y	V	2	0	0	0	23	25
	Всего						165

Таблица 4. Результаты экспериментов. Реализованные коалиции

Для анализа эффектов первой и последней секунды разделим все раунды на три части по времени так, чтобы в каждый интервал попало примерно равное количество сделок. Получается, что начало раунда – это первые 15 секунд, а конец – последние 5. В таблице 4.5 приведены процентные соотношения игр, завершившихся образованием коалиций в начале раунда, а также игр, завершившихся в конце раунда (сюда же вошли игры, завершившиеся без образования коалиций). Эффектом первой (последней) секунды назовем такое распределение исходов, в котором доля игр завершившихся в начале (конец) раунда значительно превышает треть исходов. В серии X для игр с малым ядром (наборы I,II,III) ярко выражен эффект первой секунды, а в случае достаточно большого ядра (набор V) отмечается эффект последней секунды. В серии Y эффекта первой секунды не наблюдается, а эффект последней секунды появляется и увеличивается с ростом ядра.

Серия	Набор	Игры, завершившиеся в начале раунда	Игры, завершившиеся в конце раунда	Серия	Набор	Игры, завершившиеся в начале раунда	Игры, завершившиеся в конце раунда
X	I	45%	5%	Y	I	20%	36%

X	II	69%	0%		Y	II	25%	48%
X	III	80%	5%		Y	III	24%	52%
X	IV	30%	15%		Y	IV	8%	76%
X	V	20%	55%		Y	V	4%	84%

Таблица 4.5. Результаты экспериментов. Эффекты первой и последней секунды

Поведение участников в проведенных лабораторных экспериментах в целом согласуется с предполагаемым поведением игроков на аукционе с наведенными заявками. Это говорит о том, что применяемый способ мотивирования игроков не снижает рациональности их поведения.

4.2.3.1 Проверка статистических гипотез

Теперь проведем анализ влияния информированности участников на результаты экспериментов. Так как в рамках серии разбиение на тройки и распределение ролей внутри тройки было случайным, то последовательность получившихся коалиций можно считать независимыми реализациями некоторых дискретных случайных величин X_M в первой серии экспериментов и Y_M во второй серии (где $M \in \{I, II, III, IV, V\}$).

Для каждого M проверим гипотезу, что X_M и Y_M являются реализациями одной случайной величины. Осуществлено $k = 2$ последовательных серии независимых наблюдений, состоящих из n_1, \dots, n_k наблюдений соответственно, при этом в каждом опыте наблюдаются некоторый переменный признак, принимающий одно из s различных значений (исходов). Пусть v_{ij} – число реализаций i -го исхода в j -ой серии, так что $\sum_{i=1}^s v_{ij} = n_j, j = 1, \dots, k$.

Проверим гипотезу H_0 о том, что все наблюдения производились над одной и той же случайной величиной. Воспользуемся критерием однородности χ^2 [28]. В качестве статистики возьмем функцию $T = n \left(\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^k \frac{v_{ij}^2}{v_{*j} v_{i*}} - 1 \right)$. При

$n \rightarrow \infty \quad L(T | H_0) \rightarrow \chi^2((s-1)(k-1))$, где критическая область задается в виде $\Gamma_{1\alpha} = \{t \geq t_\alpha\}$.

Полученные значения статистик и соответствующие значения p-value приведены в таблице 4.6. Таким образом, при наиболее распространенном уровне значимости $\alpha = 95$ гипотеза однородности отвергается для экспериментов с характеристическими функциями I, II и III. Мы можем сделать вывод, что дополнительная информация о наличии блокирующих стратегий радикальным образом повлияла на результаты экспериментов. Также можно сказать, что наличие блокирующих стратегий в данном механизме является нетривиальным фактом, требующим детального анализа аукциона.

Набор парам.	Степени свободы (s-1)	Значение статистики	p-value (%)
I	3	8.481522	96.2959
II	4	30.64091	99.9996
III	4	21.89423	99.9790
IV	1	0.672256	58.7734
V	1	0.160714	31.1500

Таблица 4.6. Значения статистик и p-value для сравнения серий X и Y.

Для характеристических функций IV и V экспериментальные данные не противоречат гипотезе однородности. Этот факт является предсказуемым, т.к. в данных случаях парные коалиции слабы и практически любая стратегия будет блокирующей.

4.2.4 Анализ влияния информации о значениях N-ядер

Значение N-ядер является дележом, поэтому для анализа следует отбросить все исходы, кроме реализации коалиции трех игроков. В силу причин, описанных в предыдущем разделе, в эксперименте «X» очень мало дележей (см., например, таблицу 4). Поэтому для анализа влияния дополнительной информации о значениях N-ядер будем сравнивать две серии экспериментов: «Y» и «Z».

Для оценки близости точек на множестве дележей потребуется некоторая метрика. Обозначим множество дележей: $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x(N) = V_N, x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n\}$. Тогда на множестве D^n можно ввести метрику: $\forall x, y \in D^n : M(x, y) \equiv M_{xy} = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|$. Основным оцениваемым параметром – расстояние до N-ядра: $\eta = \max_{i=1, \dots, n} |y_i - Nucl_i|$, $\theta = \max_{i=1, \dots, n} |z_i - Nucl_i|$.

4.2.4.1 Проверка статистических гипотез

Теперь проведем анализ влияния информированности участников на результаты экспериментов. Так как в рамках серии разбиение на тройки и распределение ролей внутри тройки было случайным, то последовательность полученных расстояний до N-ядра можно считать независимыми реализациями некоторых непрерывных случайных величин Y_M во второй серии экспериментов и Z_M в третьей серии (где $M \in \{I, II, III, IV, V\}$).

Для разных пар реализаций проверим гипотезу H_0 , что эти наборы являются реализацией одной и той же случайной величины, а это означает, что функции распределения равны: $F_1(x) = F_2(x)$. Воспользуемся критерием однородности Смирнова [28]. В качестве статистики возьмем функцию $D_{nm} = \sup_{-\infty < x < +\infty} |F_{1n}(x) - F_{2m}(x)|$, где $F_{1n}(x)$ и $F_{2m}(x)$ эмпирические функции распределения случайных величин, измеренных n и m раз соответственно. По теореме Смирнова нормированная статистика $T_{nm} = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{nm}$ удовлетворяет следующему предельному соотношению: при $n, m \rightarrow \infty$ вероятность подчиняется закону $P(T_{nm} < t \mid H_0) \rightarrow K(t) = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} (-1)^j e^{-2j^2 t^2}$, и критическая область задается в виде $\Gamma_{1\alpha} = \{t \geq t_\alpha\}$.

Графики эмпирических функций распределения величин « Y_M » и « Z_M » представлены на рис. 4.1-4.5. Сравнение эмпирических функций распределения проведено попарно для каждого значения $M \in \{I, II, III, IV, V\}$.

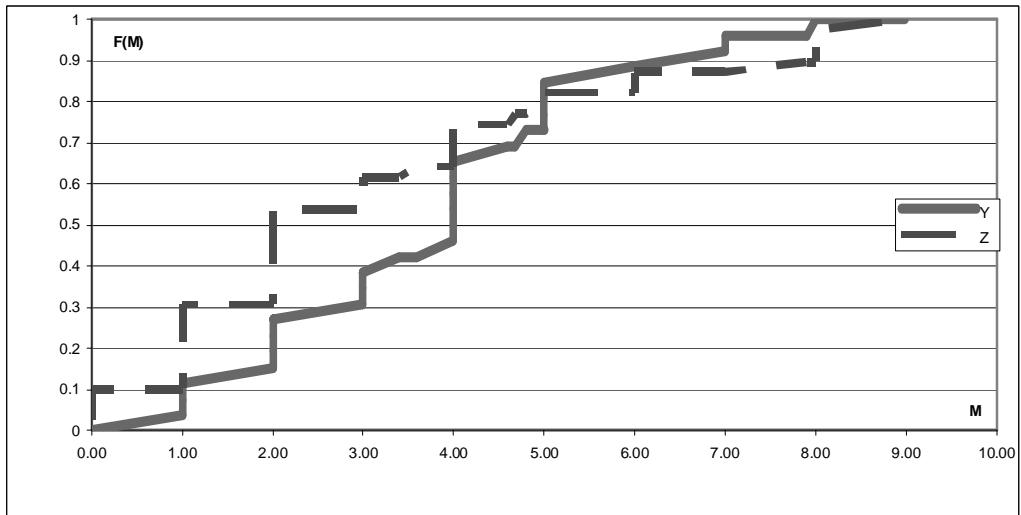


Рис. 4.1. Эмпирические функции распределения величин « Y_1 » и « Z_1 »

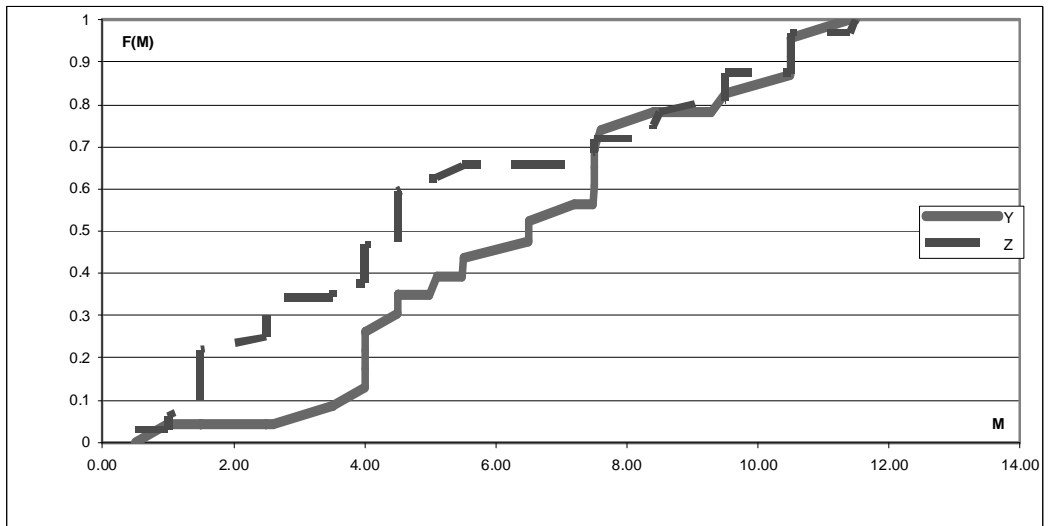


Рис. 4.2. Эмпирические функции распределения величин « Y_2 » и « Z_2 »

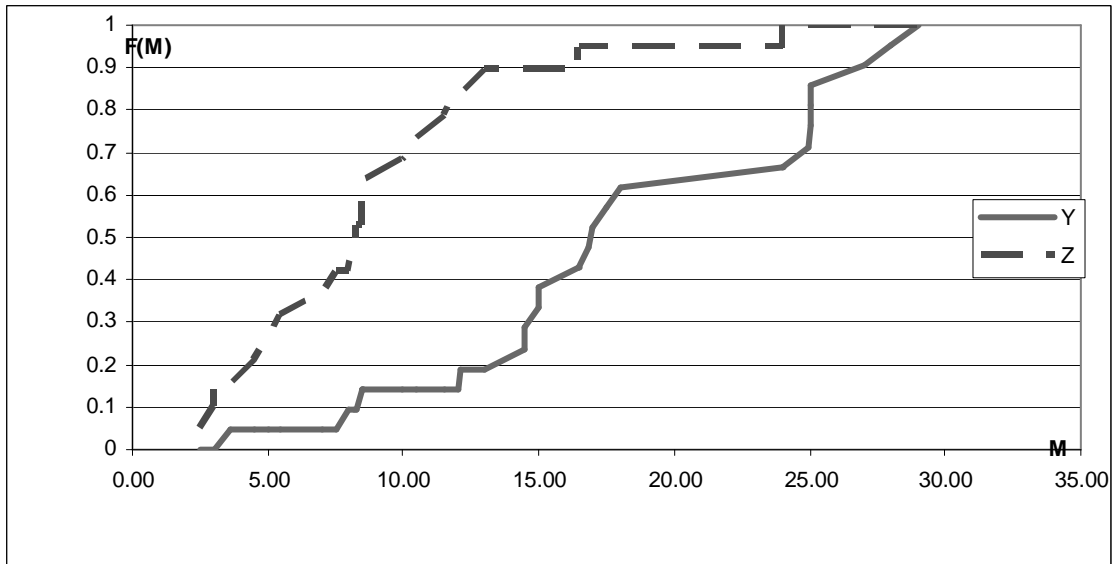


Рис. 4.3. Эмпирические функции распределения величин « Y_3 » и « Z_3 »

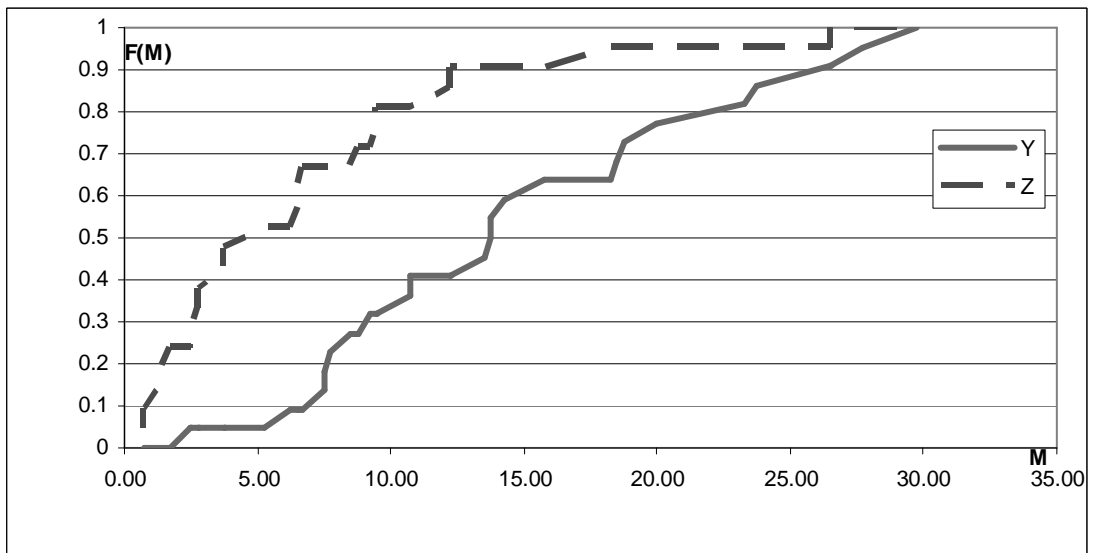


Рис. 4.4. Эмпирические функции распределения величин « Y_4 » и « Z_4 »

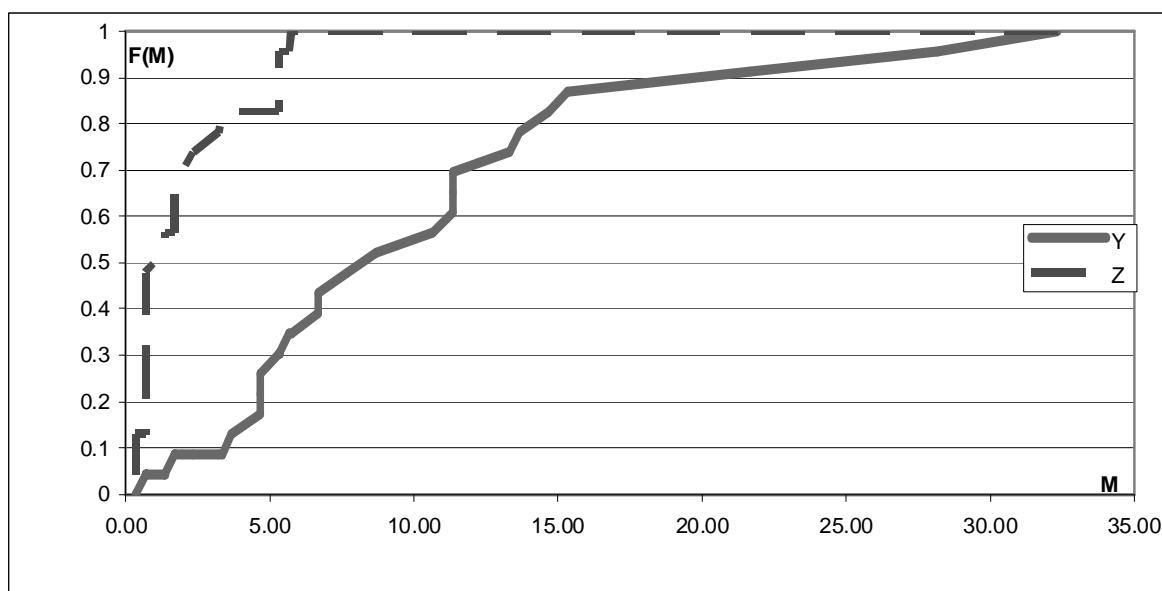


Рис. 4.5. Эмпирические функции распределения величин « Y_5 » и « Z_5 »

Набор параметров	D_{nm}	Значение статистики	p-value (%)
I	0.2692	1.0634	79.1856
II	0.3003	1.0984	82.1053
III	0.7043	2.2243	99.9899
IV	0.5758	1.8872	99.8388
V	0.7391	2.5065	99.9993

Таблица 4.7. Значения статистик и p-value для игры распределения расстояний

Полученные значения статистик и соответствующие значения p-value приведены в таблице 4.7. Таким образом, при уровне значимости не меньше, чем $\alpha = 99$ гипотеза однородности отвергается для экспериментов с характеристическими функциями III, IV и V. Мы можем сделать вывод, что дополнительная информация о наличии и значении N-ядра радикальным образом повлияла на результаты экспериментов. Также можно сказать, что имеет место эффект фокусировки.

Для характеристических функций I и II экспериментальные данные не противоречат гипотезе однородности. Этот факт является предсказуемым, т.к. в данных случаях малый размер ядра, поэтому разброс вокруг N-ядра –

центра ядра – является небольшим. Эффект фокусировки в этих случаях не проявляется.

4.2.5 Интерпретация результатов

В ходе эксперимента получен результат, заключающийся в радикальном изменении поведения участников при дополнительной информации о блокирующих стратегиях.

Этот результат позволяет сделать заключение о том, что наличие блокирующих стратегий является нетривиальным фактом. Это в некотором смысле оправдывает подробный анализ аукциона с наведенными заявками для кооперативных игр, проведенного в главе 2.

4.3 Сравнительный анализ игр по сетевому газовому аукциону

В ЛЭЭ достаточно много экспериментов и работ посвящено изучению сетевого аукциона «TRUE» [31, 32]. С одной стороны это рынок является достаточно простым для неподготовленных участников, а также имеет наглядную экономическую интерпретацию. С другой стороны он имеет нелинейную структуру и интересен для проведения экспериментов.

Большая часть работ содержит, в основном, качественный анализ результатов. В работе [33], например, используется индекс Лузмора–Хэндби [9] для сравнения различных серий. Но все равно там не приводятся доказательства статистической значимости полученных числовых результатов. В частности там утверждается, что на «рынке холдингов» все игроки пытаются максимизировать прибыль всех своих экономических агентов, независимо от состава и размера холдингов.

Целью данной работы является постановка нескольких серий экспериментов для проверки упомянутой статистической гипотезы.

4.3.1 Построение проектных игр

Для данной серии экспериментов выбрано четыре различных проектных представления сетевого аукциона «TRUE». Первое – простое проектное представление игры «TRUE». В этом аукционе участвуют четыре игрока (Turk, Rus, Ukr, Eur), которые управляют семью экономическими агентами: два продавца газа (Т и R), два покупателя (U и E) и три газопровода (Т->R, R->U и U->E). На рис. 4.6 в вершинах и ребрах расположены агенты сетевого рынка, которые вертикальными секциями поделены между игроками. В квадратах указаны ограничения на добычу, транспортировку и потребление газа, в кружках – затраты на единицу произведенной и доставленной продукции для продавцов и транспортировщиков, а также в ромбах отмечена выкупная стоимость для покупателей.

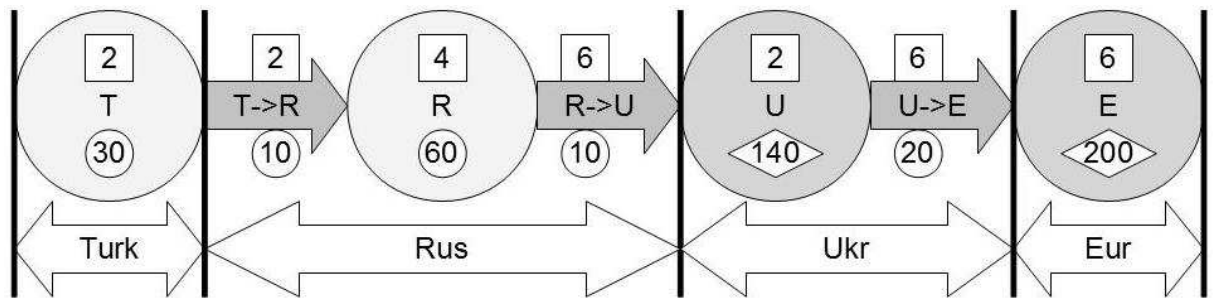


Рис. 4.6. Сетевой газовый рынок TRUE

В качестве второй модели предлагается изоморфное представление рынка – «Проектная игра TRUE-28». Нетрудно заметить, что на рынке присутствует 28 экономических действий (2 единицы добычи в узле Т, 2 транспортировки из Т в R и т.д.), причем эти действия можно объединить в четыре прибыльных проекта. Самый прибыльный проект: полная поставка одной единицы газа из Т в E (добыча в Т, транспортировка по всем трем газопроводам и потребление в E, цена проекта – 130 – цена газа в E минус затраты на добычу и транспортировку). Остальные три проекта – это полные поставки единицы газа из R в E, из Т в U и из R в U с ценами 110, 90 и 70.

Следующее представление – это «Проектная игра TRUE-7». В этом случае участниками проектов будут не элементарные действия экономических агентов, а сами агенты – по два производителя и покупателя и три перевозчика. Здесь проектами будут минимальные прибыльные коалиции агентов [48]. Коалиция всех кроме U имеет максимальную цену – 700. Еще три проекта – поставка пары единиц газа из T в E, из T в U и из R в U – будут иметь цены 260, 180 и 140 соответственно. И пятый проект – поставка четырех единиц газа из R в E с ценой 440.

И, наконец, четвертое представление – это «Проектная игра TRUE-4» или просто кооперативная игра «TRUE». В этом случае вообще нет никакого разбиения на агентов, т.е. каждый игрок играет только за одного себя. Здесь проекты – это коалиции с положительным выигрышем, а доходы – значения характеристической функции [48]: $V(Rus, Ukr) = 140$, $V(Turk, Rus, Ukr) = 180$, $V(Rus, Ukr, Eur) = 440$ и $V(Turk, Rus, Ukr, Eur) = 700$.

4.3.2 Планирование и проведение серий экспериментов

Данный эксперимент был спланирован и проведен на базе лаборатории экспериментальной экономики МФТИ и ВЦ РАН в 2008 году. Участниками эксперимента были студенты 6 курса ФУПМ МФТИ. Всего для анализа было выбрано пять серий, обозначенных «V», «W», «X», «Y», «Z». Детальная информация о сериях отображена в таблице 4.8.

Серия	Дата	Игра	Кол-во участников	Кол-во попыток	Кол-во игр (четверок)
V	2008-11-22	TRUE	16	6	24
W	2008-11-29	TRUE-28	16	3	12
X	2008-12-06	TRUE-28	16	5	20
Y	2008-12-06	TRUE-7	20	8	40
Z	2008-12-06	TRUE-4	20	11	55

Таблица 4.8. Различные представления игры «TRUE»

Все основные условия проведения серий были одинаковы. Главное отличие серий друг от друга – это различное проектное представление сетевого аукциона «TRUE» (кроме пары «W», «X»). Перед началом каждой серии были подробно рассказаны правила, а также внимание участников было акцентировано на проектных различиях.

4.3.3 Извлечение данных для анализа

Как уже говорилось ранее, для анализа выбираются только итоговые результаты из каждого периода. То есть для каждой четверки в каждой попытке получается вектор выигрышей игроков в группе.

Полученный набор векторов будем считать реализациями некоторого случайного вектора. Причем каждая серия это отдельный случайный вектор.

4.3.4 Построение гипотезы для пары серий

Основная идея – проверить влияет ли разное проектное представление на результирующие распределения выигрышей.

Для различных пар серий проверим гипотезу, что полученные реализации принадлежат одному закону распределения.

4.3.5 Сворачивание случайного вектора в случайную величину

В работе [35] сделана попытка анализа сетевого аукциона «TRUE» методами кооперативной теории игр. Основным расхождением теории и экспериментов заключались в различии выигрышей «Rus» и «Ukr». Теория говорит, что эти выигрыши должны быть равны, а в экспериментах наблюдается превосходство выигрышей в 1.5 – 2.5 раза.

В силу указанных причин, предметом исследований является соотношение выигрышей игроков «Rus» и «Ukr». Поэтому в качестве скалярной случайной величины выберем разницу выигрышей этих игроков: $\xi = u^{Rus} - u^{Ukr}$. Итак, мы получили реализации пяти («V», «W», «X», «Y», «Z») случайных величин. Далее применим методы математической статистики.

4.3.6 Применение критерия согласия Смирнова для проверки гипотезы однородности

Для разных пар реализаций проверим гипотезу H_0 , что эти наборы являются реализацией одной и той же случайной величины, а это означает, что функции распределения равны: $F_1(x) = F_2(x)$. Воспользуемся критерием однородности Смирнова [28]. В качестве статистики возьмем функцию $D_{nm} = \sup_{-\infty < x < +\infty} |F_{1n}(x) - F_{2m}(x)|$, где $F_{1n}(x)$ и $F_{2m}(x)$ эмпирические функции распределения случайных величин, измеренных n и m раз соответственно. По теореме Смирнова нормированная статистика $T_{nm} = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{nm}$ удовлетворяет следующему предельному соотношению: при $n, m \rightarrow \infty$ вероятность подчиняется закону $P(T_{nm} < t | H_0) \rightarrow K(t) = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} (-1)^j e^{-2j^2 t^2}$, и критическая область задается в виде $\Gamma_{1\alpha} = \{t \geq t_\alpha\}$.

Графики эмпирических функций распределения величин «V», «W» и «X» представлены на рис. 4.7, для величин «X», «Y» и «Z» – на рис. 4.8. Сравнение эмпирических функций распределения проведено попарно внутри каждой тройки.

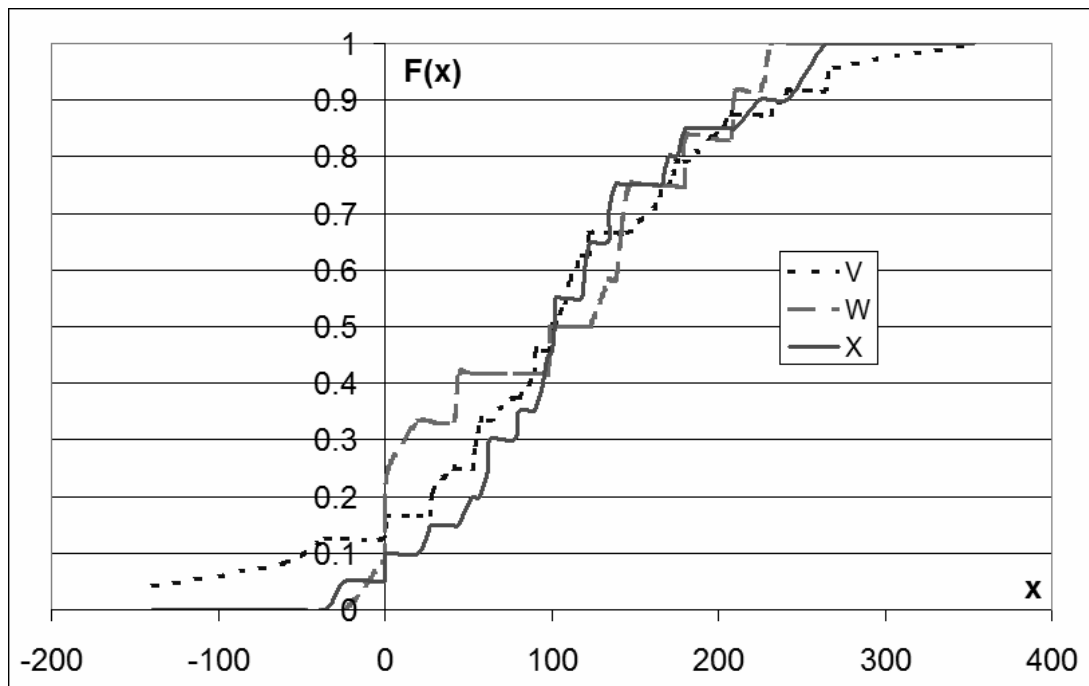


Рис. 4.7. Эмпирические ФР величин «V», «W» и «X»

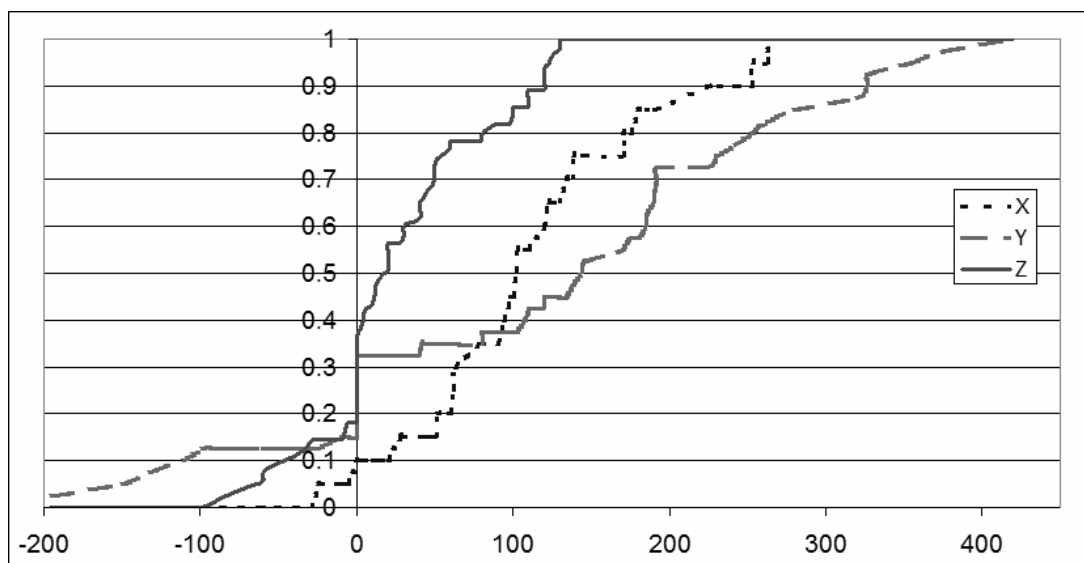


Рис. 4.8. Эмпирические ФР величин «X», «Y» и «Z»

Пара экспериментов	D_{nm}	Значение статистики	p-value (%)
VW	0.1667	0.4714	2.0637
VX	0.1333	0.4404	0.9824
WX	0.2667	0.7303	33.9614
XY	0.2750	1.0042	73.4431
XZ	0.5955	2.2804	99.9939
YZ	0.5500	2.6467	99.9998

Таблица 4.9. Значения статистик и p-value для игры «TRUE»

Полученные значения статистик и соответствующие значения p-value приведены в таблице 4.9. Таким образом, при наиболее распространенном уровне значимости $\alpha = 95$ гипотеза однородности отвергается для пар экспериментов «XZ» и «YZ».

4.3.7 Интерпретация результата

Как уже было сказано, предпосылками к данному эксперименту стало несоответствие результатов экспериментов с предсказаниями теории игр. Полученный в данном анализе результат можно трактовать в пользу правильности введения проектной игры, т.к. она дает более детальное представление экономической ситуации по сравнению с кооперативной игрой.

4.4 Моделирование рынка программного обеспечения в лаборатории

Одним из примеров товара коллективного пользования является программное обеспечение (ПО). Будучи один раз разработанным, ПО может быть тиражировано и использована на многих компьютерах.

4.4.1 Рынок банковского программного обеспечения

Описываемая в данном разделе игра получило название «BNK» [52]. Есть фирма F, которая может произвести три различных программных продукта с затратами $c_k^f, k=1,2,3$. Есть 2 банка (A и B). Каждый банк состоит из двух подразделений: бизнес и ИТ. Бизнес-подразделение банка A знает, что если будет использовать софт 1, то получит от этого прибыль v_1^a , а если будет использовать софт 3, то прибыль v_3^a . Отдел ИТ может внедрить только одну из программ с затратами c_0^a . Аналогично, бизнес-подразделение банка B знает, что если будет использовать софт 2, то получит от этого прибыль v_2^b , а если будет использовать софт 3, то прибыль v_3^b . отдел ИТ может внедрить только одну из программ с затратами c_0^b .

Возможна реализация трех проектов. Проект 1: производство софта 1 фирмой F + внедрение банком A + потребление банком A. Проект 2: производство софта 2 фирмой F + внедрение банком B + потребление банком B. Проект 3: производство софта 3 фирмой F + внедрение банком A + потребление банком A + внедрение банком B + потребление банком B.

Реализация третьего продукта исключает реализацию первых двух, так как каждый из банков может внедрить только один из продуктов. Графическое представление данной игры приведено на рис. 4.9.

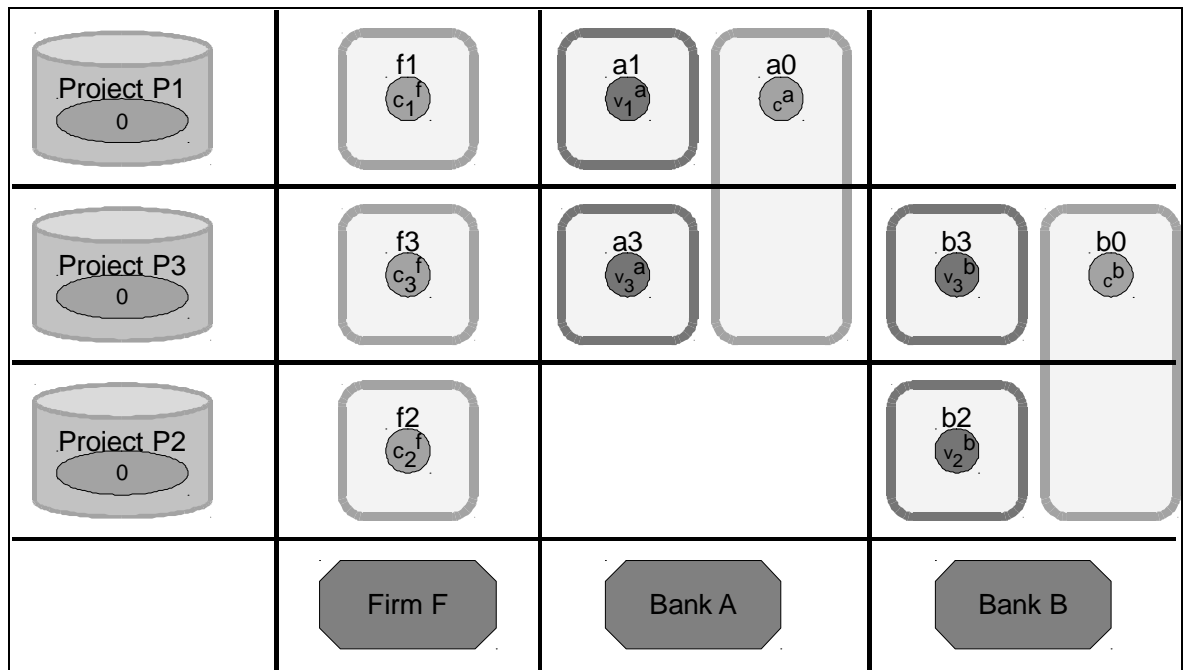


Рис. 4.9. Проектное представление игры «BNK»

Для полноты описания игры необходимо добавить, что часть числовых параметров не являются константами: это случайные параметры, с заданным распределением. Точные значения и границы равномерного распределения указаны в таблице 4.10.

⋮	$c_0^a = 25$	$c_0^b = 25$
$c_1^f \in [0, 50]$	$v_1^a \in [75, 125]$	⋮
$c_2^f \in [0, 50]$	⋮	$v_2^b \in [75, 125]$
$c_3^f \in [25, 75]$	$v_3^a \in [75, 125]$	$v_3^b \in [75, 125]$

Таблица 4.10. Затраты и выкупные стоимости в игре «BNK»

Необходимо отметить, что ИТ отделы банков имеют как техническое, так и логическое назначение. Технически в проектной игре они помогают исключить внедрение двух продуктов одновременно. Логически разделение банка на два отдела подчеркивает, что внедрение нового дает некоторые бонусы для развития банка, а также требует определенных постоянных затрат на внедрение.

4.4.2 Аукцион с наведенными заявками

Каждый игрок выставляет заявки на свои операции. Фирма выставляет три заявки типа «ask» на продажу своих продуктов $p_k^f, k = 1, 2, 3$. Банки от лица своих отделов ИТ подают по одной заявке типа «ask» на оказание услуги внедрения продукта p_0^a, p_0^b . Также банки от лица бизнес отделов подают заявки типа «bid» на покупку программ: $p_1^a, p_3^a, p_2^b, p_3^b$. Итак, в каждом проекте есть множество «продавцов» и «покупателей». Очевидно, что проект может реализоваться, только если суммарная цена покупки (суммарный bid) будет не меньше суммарной цены продажи (суммарный ask).

Запишем это для каждого проекта:

$$1: p_1^a \geq p_1^f + p_0^a,$$

$$2: p_2^b \geq p_2^f + p_0^b,$$

$$3: p_3^a + p_3^b \geq p_3^f + p_0^a + p_0^b.$$

В каждом проекте k обозначим множество покупателей B^k , а множество продавцов S^k . Тогда каждый продавец s проекта k получает встречную на-

веденную заявку типа bid с ценой $q_k^s = \sum_{j \in B^k} p_k^j - \sum_{i \in S^k \setminus s} p_k^i$; а каждый покупатель b проекта k получает встречную наведенную заявку типа ask с ценой $q_k^b = \sum_{i \in S^k} p_k^i - \sum_{j \in B^k \setminus b} p_k^j$. Каждый из отделов ИТ может участвовать сразу в двух проектах, поэтому они получают по две наведенные заявки. Система автоматически выбирает для них наилучшую из заявок.

Далее идет сценарий, аналогичный сценарию для финансовых рынков. Все игроки подают свои заявки или соглашаются со встречными и получают соответствующие выигрыши. При соглашении с встречной заявкой сделка происходит по цене встречной заявки.

За совершенные сделки игроки получают выигрыши:

$$u_{seller} = p_{seller} - c_{seller}$$

$$u_{buyer} = v_{buyer} - p_{buyer}$$

Сортировка заявок в очередях осуществляется стандартным образом: наверху очереди bid стоит заявка с самой высокой ценой, для ask – с самой низкой, в случае равенства цен «лучше» та, которая была подана (а точнее принята системой) раньше.

4.4.3 Особенности игры «BNK»

Банки могут использовать только одну из программ. Таким образом, существует альтернатива: либо реализуется проект с изготовлением третьего продукта коллективного пользования, либо реализуются одиночные продукты (оба или один из двух). Эффективные доходы проектов можно вычислить по формулам:

$$h_1 = v_1^a - c_1^f - c_0^a,$$

$$h_2 = v_2^b - c_2^f - c_0^b,$$

$$h_3 = v_3^a + v_3^b - c_3^f - c_0^a - c_0^b.$$

Средний доход проектов 1 и 2 равен 50, то есть средний суммарный доход индивидуальных проектов равен 100. Средний доход коллективного проекта также равен 100.

Такое соотношение выбрано специально: априори неизвестно, какой кооперативный исход будет более выгоден для всех игроков. Это одна из целей эксперимента: определить, поможет ли аукцион с наведенными заявками, как рыночный механизм, выявить наиболее выгодный вариант.

Также можно построить характеристическую функцию для данной игры.

$$V(FA) = h_1,$$

$$V(FB) = h_2,$$

$$V(FAB) = \max(h_3; h_1 + h_2).$$

4.4.4 Пробный эксперимент

Данный эксперимент был спланирован и проведен на базе Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ и ВЦ РАН в 2012 году (30 ноября). Участниками эксперимента были студенты 6 курса ФУПМ МФТИ. Все участвовало 15 студентов, и было разыграно 55 игр. Результаты эксперимента

изображены на рис. 4.10. Каждая точка означает единичный розыгрыш игры «BNK». На оси абсцисс отмечена разница $h_3 - h_2 - h_1$, а по оси ординат эффективность участников, т.е. отношение реализованного выигрыша к максимально возможному. Таким образом, в правой области графика реализация коллективного продукта была выгоднее, а в левой, наоборот, выгоднее было реализовать два индивидуальных продукта.

Для удобства все точки разделены на две группы – коалиционные исходы, когда все три игрока участвовали в сделке, и остальные. Необходимо отметить, что не все коалиционные исходы имеют 100% эффективности. Можно заметить, что в правой части графика около прямой под 45 градусов сосредоточено достаточно много коалиционных точек. Эти точки соответствуют исходам, в которых было реализовано два индивидуальных товара, хотя выгоднее было один общий.

Также достаточно много бескоалиционных исходов: нулевые, когда не было ни одной сделки, и исходы с одной индивидуальной сделкой.

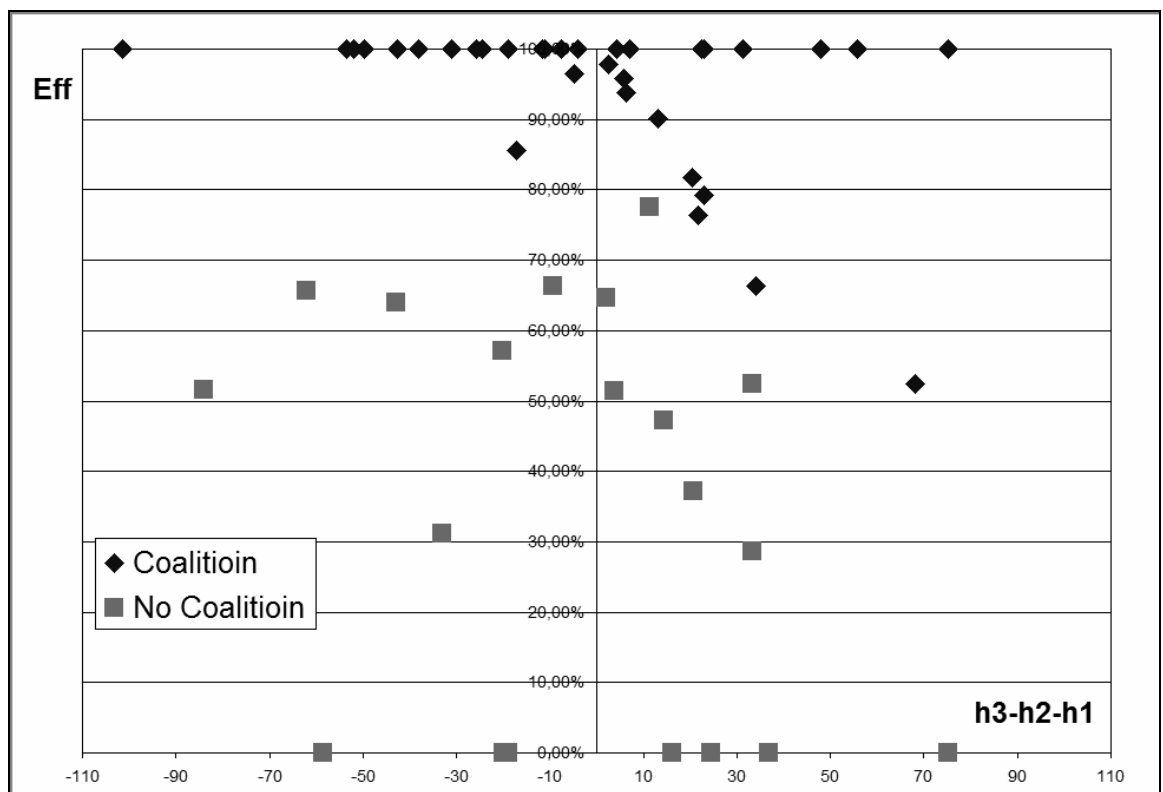


Рис. 4.10. Пробный эксперимент «BNK»

Дополнительно можно отметить, что средняя эффективность участников достигла в этом эксперименте 73%. Это достаточно высокая эффективность для такого сложного проектного аукциона с неполной информацией.

4.4.5 Основные эксперименты

Данный эксперимент был спланирован и проведен на базе Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ и ВЦ РАН в 2013 году (19 апреля). Участниками эксперимента были студенты 5 курса ФУПМ МФТИ. Все участники были поделены на две группы: 6 и 9 студентов. В каждой группе было разыграно 24 и 36 игр соответственно.

Результаты экспериментов представлены на рисунках 4.11 и 4.12.

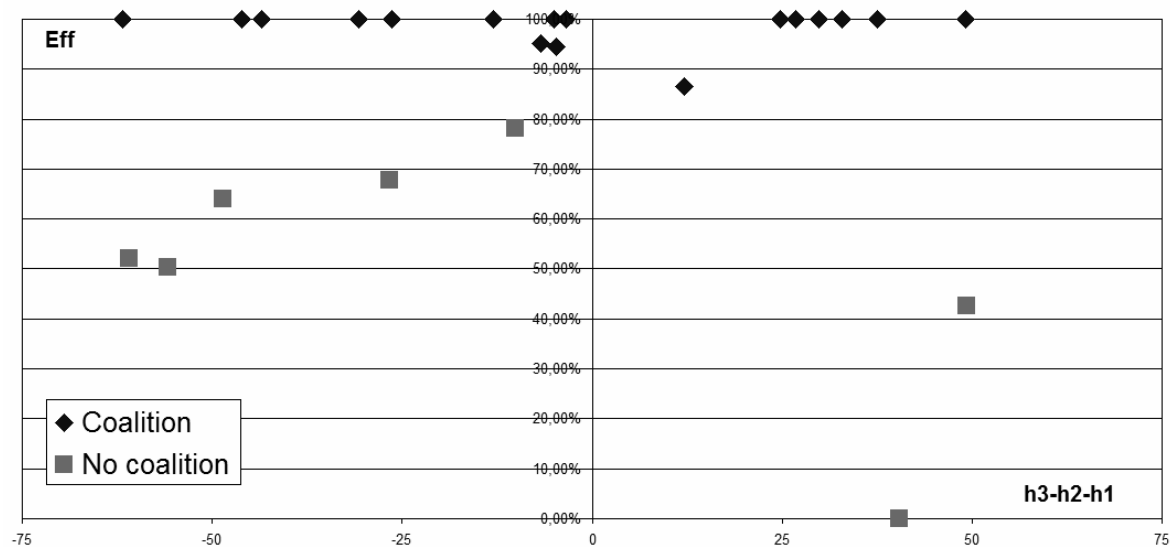


Рис. 4.11. Первый эксперимент «BNK»

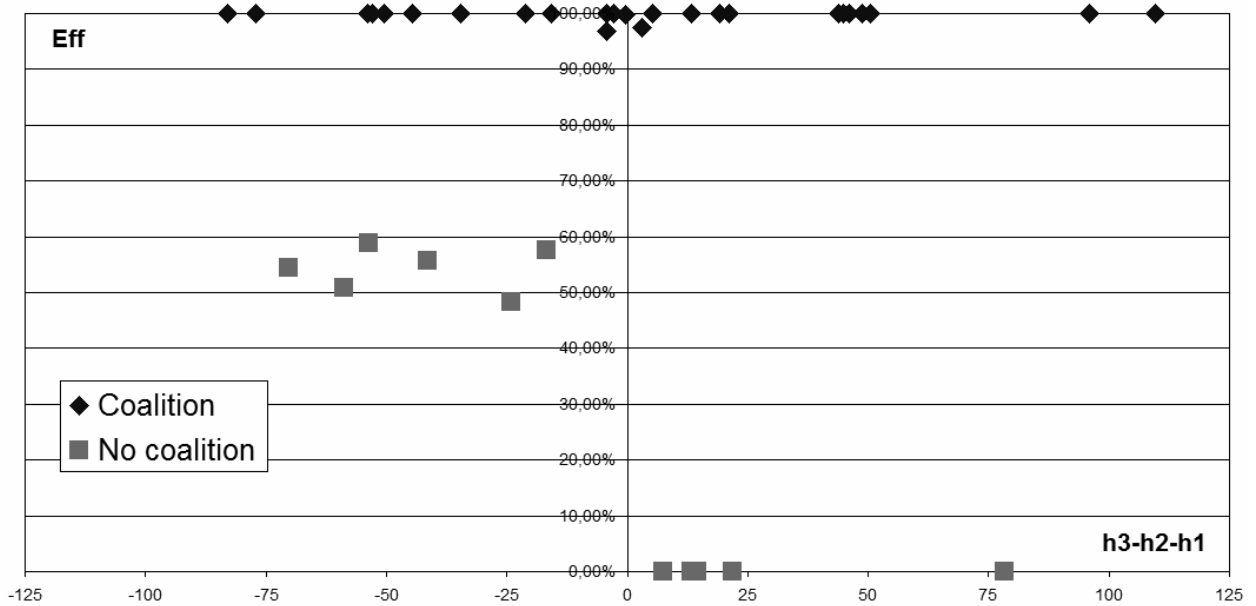


Рис. 4.12. Второй эксперимент «ВНК»

В этих экспериментах видно, что участники в большинстве случаев смогли с помощью рыночного механизма найти оптимальное кооперативное решение, но все равно осталось достаточно много бескоалиционных исходов.

Средние эффективности в этих экспериментах значительно выше пробных и составляют 84% и 81%.

Таким образом, можно сделать заключение, что аукцион с наведенными заявками можно эффективно использовать для достаточно сложных проектных игр с неполной информацией.

4.5 Основные результаты главы 4

Основными результатами четвертой главы являются подтверждение двух гипотез о поведении игроков в лабораторных экспериментах. Первая гипотеза заключается в том, что дополнительная информация может в некоторых случаях радикально менять результаты идентичных экспериментов. Вторая гипотеза заключается в том, что различные теоретико-игровые представления одной и той же экономической ситуации могут радикально менять результаты экспериментов.

Еще одним важным выводом четвертой главы является то, что аукцион с наведенными заявками с высокой степенью эффективности можно использовать для достаточно сложных игр с неполной информацией.

Заключение

Основные результаты работы

- Введена концепция проектной игры, которая является математической моделью взаимодействия нескольких участников, имеющих возможность вступать в кооперацию. Частным случаем проектной игры являются кооперативные игры, сетевые аукционы и рынки товаров коллективного пользования.
- Для произвольной проектной игры разработан алгоритм построения динамической игры, которая позволяет формализовать переговорный процесс, приводящий к реализации дележа. Переговорный процесс реализован с помощью универсального механизма: непрерывного двойного аукциона с наведенными заявками. Доказана корректность определения полученной динамической игры.
- Для анализа динамической кооперативной игры с наведенными заявками введены понятия большого и малого предъядра. Данные понятия позволили описать множество достижимости, а также множество блокирующих состояний игры. Установлена связь полученных результатов на основе введенных определений с классическими результатами кооперативной теории игр.
- Выделен и детально проанализирован класс кооперативных игр с нулевыми выигрышами малых коалиций. В частности, для этого класса кооперативных игр получена аналитическая формула для вычисления N -ядра.
- Разработан язык описания проектных игр. Реализован программный комплекс для проведения в лаборатории проектных игр с использованием аукциона с наведенными заявками.
- С помощью постановки, проведения и анализа результатов последовательных серий лабораторных экспериментов подтверждены следующие гипотезы о поведении участников:

- информация о наличии блокирующих стратегий в динамической кооперативной игре существенно влияет на результаты эксперимента;
- различные проектные представления одного и того же сетевого рынка существенно влияют на результаты эксперимента.
- В лабораторных условиях проведено моделирование рынка программного обеспечения, который является примером рынка товаров коллективного пользования.

Оценка полноты решений поставленных задач

Построена математическая модель проектной игры. Данная концепция позволяет описывать все виды целевых экономических ситуаций: кооперативную игру, сетевой аукцион и рынок товаров коллективного пользования. Необходимо отметить, что данная модель не исчерпывается приведенными классами теоретико-игровых ситуаций и может быть применена и в некоторых других случаях.

Для произвольной проектной игры построен универсальный механизм переговоров, основанный на двойном аукционе с наведенными заявками. При построении аукциона использовано лексикографическое правило упорядочивания наведенных заявок. Это позволило при достаточно общих предположениях построить детерминированный механизм взаимодействия игроков.

Построенный аукцион был реализован программно. Полученный программный комплекс позволяет проводить лабораторные эксперименты с использованием аукциона с наведенными заявками для произвольной экономической ситуации, описываемой проектной игрой.

С помощью реализованного программного комплекса были проведены несколько серий лабораторных экспериментов в Лаборатории экспериментально экономики МФТИ и ВЦ РАН. Эксперименты проводились в рамках

курса «Экспериментальная экономика», читаемого студентам 5 и 6 курсов факультета управления и прикладной математики МФТИ.

Из достаточно большого количества серий проведенных экспериментов были выбраны несколько для анализа. В ходе анализа были экспериментально подтверждены две важные гипотезы о поведении участников лабораторных экспериментов. Первая гипотеза заключается в том, что дополнительная информация может в некоторых случаях радикально менять результаты идентичных экспериментов. Вторая гипотеза заключается в том, что различные теоретико-игровые представления одной и той же экономической ситуации могут радикально менять результаты экспериментов. Дополнительно были проведены серии игр, моделирующих рынок товаров коллективного пользования. Выбранная модель является игрой с неполной информацией. Эксперименты показали, что аукцион с наведенными заявками является вполне эффективным для достаточно сложных моделей игр с неполной информацией.

В ходе постановки, проведения и анализа результатов проведенных экспериментов возникли новые задачи, относящиеся к области математического моделирования и теории игр. В частности, для анализа динамической кооперативной игры с наведенными заявками были введены новые понятия: большое и малое предъядро. С помощью введенных определений были описаны множества достижимости и блокирующие состояния в динамической игре.

Для проведения лабораторных экспериментов были выбраны простейшие кооперативные игры – игры трех лиц. При дальнейшем анализе выяснилось, что большинство свойств кооперативных игр трех лиц могут быть перенесены на обобщающий класс игр с нулевыми выигрышами малых коалиций. В частности, для полученного класса было получено аналитическое решение задачи нахождения N -ядра, которая в общем случае является достаточно сложной лексикографической задачей линейного программирования.

Из всего изложенного можно сделать вывод, что все целевые задачи были решены в полной мере, а также было получено решение для некоторых важных сопутствующих задач.

Список литературы

1. Aleskerov F., Belianin A., Pogorelskiy K. Power and preferences: an experimental approach // State University - Higher School of Economics – Moscow, Russia, 2009. – 17 p.
2. Bossaerts P., Kleiman D., Plott C. Price Discovery in Financial Markets: the Case of the CAPM – California Institute of Technology, Working Paper 1032, 1999.
3. Bossaerts P., Plott C. The CAPM in Thin Experimental Financial Markets – Journal of Economic Dynamics and Control, 26 (2001).
4. Bossaerts P., Plott C., Zame W. Prices and Portfolio Choices in Financial Markets: Theory and Experiment – University of California, 2003.
5. Fischbacher U. z-Tree – Zurich Toolbox for Readymade Economic Experiments - Experimenter's Manual // Working Paper №.21, Institute for Empirical Research in Economics, University of Zurich. – 1999. – 93 p.
6. Fischbacher U. z-Tree: Zurich toolbox for ready-made economic experiments // Experimental – 2007 – P.171-178.
7. Janssen M. A., Ahn T.K. Adaptation vs. Anticipation in Public-Good Games // Annual Meeting of the American Political Science Association, Philadelphia – 2003. – 44 p.
8. Hogan W. Electricity Transmission and Merging Competition? Why the FERC's Mega-NORP Falls Short // Public Utilities Fortnightly – 1995, v. 133, №13 – P. 32-36.
9. Loosemore J., Hanby V.J. The Theoretical Limits of Maximum Distortion: Some Analytic Expressions for Electoral Systems // British Journal of Political Science 1. – 1971. – P. 467-477.
10. McCabe K., Rassenti J., Smith V. Designing 'Smart' Computer-Assisted Markets // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. – 2001. – V. 98. – P. 678-702.
11. Montero, M., Sefton, M., and Zhang, P. Enlargement and the balance of power:

- an experimental study. // *Social Choice and Welfare*. – 2008. V. 30. – P. 69-87.
12. Ostrom E. *Governing the commons: The evolution of institutions for collective action* // Cambridge university press, 1990 – P. 1-281.
 13. Palfrey T.R., Prisbery J.E. 1997. “Anomalous Behavior in Public Good Experiments: How Much and Why?” *American Economic Review* 87: P. 829-846.
 14. Rassenti S.J., Smith V., Wilson B. *Using Experiments to Inform the Privatization/Deregulation Movement in Electricity* // *Cato Journal*. 2002. V. 21. N.3.
 15. Shapley L. S. *On balanced sets and cores* // *Naval Research Logistics Quarterly* 14. – 1967. – P. 453-460.
 16. Skinderev S.A. *The study of the behavior of participants in laboratory games with changes in experimental conditions* // VII Moscow International Conference on Operation Research: Moscow, 2013: Proceedings. V. I – P. 28-30.
 17. Smith V. *Experimental Economics: Induced Value Theory* // *American Economic Review*. 1976. May.
 18. Smith V. *Theory, experiment and economics* // *Journal of economic perspectives*. 1989. Winter.
 19. Smith V. *Papers in experimental economics*. New York: Cambridge University Press, 1991.
 20. Smith V., Rassenti S., Bulfin R. *A combinatorial auction mechanism for airport time slot allocation* // *Bell journal of economics*. Autumn. 1982.
 21. Vasin A., Vasina P. *Electricity Markets Analysis and Design* // Working Paper N. 2006/053. – Moscow, New Economic School – 2006.
 22. Бондарева О.Н. *Теория ядра в игре n лиц*. // *Вестник ЛГУ, сер. мат., мех., астрон.* – 1962. – № 13 – С. 141-142.
 23. Васин А.А., Васина П.А., Рулева Т.Ю. *Об организации рынков однородных товаров* // *Известия РАН. Теория и системы управления*. – 2007. №1 – С. 98-112.
 24. Вышинский Л.Л., Гринев И.Л., Флеров Ю.А., Широков А.Н., Широков Н.И. *Генератор проектов – инструментальный комплекс для разра-*

- ботки “клиент-серверных” систем. // Информационные технологии и вычислительные системы. 2003, № 1-2. М. С. 6-24.
25. Губко М. В., Спрысков Д. С. Учет кооперативных взаимодействий в механизмах планирования // УБС, № 2 – 2000. – С. 28-38.
26. Журавель Ю.Ю., Меньшиков И.С. Двойной аукцион для сетевых рынков. – М.: ВЦ РАН, 2003. – 41 с.
27. Журавель Ю.Ю., Меньшиков И.С. Поведение сетевого двойного аукциона с учетом потерь при транспортировке. Сообщения по прикладной математике. – М.: ВЦ РАН, 2004. – 36 с.
28. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1984. – 248 с.
29. Ковалев Д.А. Секьюризация торгового механизма сетевого аукциона // Труды 49 науч. конф. МФТИ, М.–Долгопрудный, 2006. – С. 134-135.
30. Меньшиков И. С. Финансовый анализ ценных бумаг. Курс лекций // «Финансы и статистика», М., – 1998. – 360 с.
31. Меньшиков И.С., Платонов В.В., Чабан А.Н. Лабораторный анализ сетевых энергетических рынков // Труды 49 науч. конф. МФТИ, М.–Долгопрудный, 2006. – С. 132-133.
32. Меньшиков И.С., Платонов В.В., Скиндерев С.А., Чабан А.Н. Сравнительный анализ эффективности лабораторных сетевых аукционов. – М.: ВЦ РАН, 2007. – 45 с.
33. Меньшиков И.С., Платонов В.В. Игровые модели сетевых аукционов и их лабораторные исследования // Математическое моделирование. 2009. Т. 21, № 8. С. 63–79.
34. Меньшикова О.Р. Методы поиска ядер кооперативных игр и их приложения. – Диссертация к.ф.-м.н. – Москва, 1977. – С. 66.
35. Меньшикова О.Р., Скиндерев С.А. Применение кооперативной теории игр к исследованию сетевых энергетических рынков в лаборатории // Труды 50 науч. конф. МФТИ, М.-Долгопрудный, 2007. – С. 144-146.
36. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. –

- М.: Мир, 1991. – 464 с.
37. О'Брайен Дж., Шривастава С. Финансовый анализ и торговля ценными бумагами (FAST): Пер. с англ. – М.: «Дело ЛТД», 1995. – 208 с.
 38. Олле Т.В. Предложения КОДАСИЛ по управлению базами данных // Финансы и статистика. Москва – 1981. С. 22-32.
 39. Писарук Н. Н. Введение в теорию игр – Минск : БГУ, 2011. – 205 с.
 40. Розенмюллер И. Кооперативные игры и рынки. М.: Мир, 1974. – 168 с.
 41. Скиндерев С.А., Меньшиков И.С. Аукцион с наведенными заявками для лабораторных кооперативных игр // Труды 51 научной конференции МФТИ, М.-Долгопрудный, 2008. – С. 64-67.
 42. Скиндерев С.А., Меньшиков И.С. Исследование предъядра в лабораторных кооперативных играх // Труды 53 научной конференции МФТИ, М. – Долгопрудный, 2010. – С. 124-125.
 43. Скиндерев С.А., Меньшиков И.С. Аукцион с наведенными заявками для лабораторных кооперативных игр // Труды VI научной конференции по исследованию операций, 2010. – С. 35-37.
 44. Скиндерев С.А., Меньшиков И.С. Использование технологии Генератор Проектов для создания лабораторных сетевых аукционов // Труды VI науч. конф. по исследованию операций, 2010. – С. 33-35.
 45. Скиндерев С.А. Использование технологии Генератор Проектов для создания лабораторных сетевых аукционов // Автоматизация проектирования инженерных и финансовых информационных систем средствами генератора проектов. М.: ВЦ РАН, 2010. – С. 80-88.
 46. Скиндерев С.А., Меньшиков И.С. Влияние информированности участников на распределение выигрышей в лабораторных кооперативных играх // Труды 54 научной конференции МФТИ, М.-Долгопрудный, 2011. – С. 71-72.
 47. Скиндерев С.А., Меньшиков И.С. Проектные игры как инструмент моделирования экономических ситуаций // Труды 55-й научной конференции МФТИ. М.: МФТИ, 2012. – С. 70-71.

48. Скиндерев С.А. Анализ различных проектных представлений сетевого газового аукциона «TRUE» // Труды 55-й научной конференции МФТИ, М.-Долгопрудный, 2012 – С. 72-73.
49. Скиндерев С.А. Блокирующие стратегии в лабораторных кооперативных играх с наведенными заявками // Труды МФТИ. – 2012. Т. 4, № 4. – С. 155-168.
50. Скиндерев С.А. Исследование особенностей поведения участников лабораторных игр при изменениях условий проведения экспериментов // Труды VII науч. конф. по исследованию операций, 2013. Т. II – С. 17-18.
51. Скиндерев С.А., Меньшиков И.С. N-ядро для кооперативных игр с нулевыми выигрышами малых коалиций // Труды 56 научной конференции МФТИ, УПМ, М.-Долгопрудный, 2013. Т. 1. – С. 71-72.
52. Скиндерев С.А. Об опыте моделирования рынка программного обеспечения в лаборатории // Труды 56 научной конференции МФТИ, УПМ, М.-Долгопрудный, 2013. Т. 1. – С. 72-73.
53. Широков Н.И. Генератор проектов. Сб. «Автоматизация проектирования финансовых информационных систем». М.: ВЦ РАН 2004. С. 23-42
54. Financial Trading System // «<http://www.osfts.com>».