УДК 531

О ГРУППОВОЙ ПРИРОДЕ СОХРАНЕНИЯ ЗАВИХРЕННОСТИ *

А. Н. Голубятников (МГУ, Москва)

Многочисленные примеры идеальных гидродинамических систем показывают, что часто вдоль мировых линий частиц среды имеет место сохранение завихренности некоторого ковектора, правда, не всегда связанного только со скоростью среды. Отсутстствие начальной завихренности этого ковектора приводит, во всяком случае, к локальному уменьшению числа искомых функций, что представляется полезным для построения достаточно широких классов решений. Ниже разъясняется групповая природа данного закона сохранения, достаточная для вывода необходимых формул.

Рассмотрим в лагранжевых переменных систему с лагранжианом вида $\Lambda(t, u^i, u^i_t, u^i_\alpha)$, $i = 1, \ldots, m$; $\alpha = 1, \ldots, n$, где $u^i(t, \xi^\alpha)$ – искомые функции времени t и лагранжевых переменных ξ^α, включающие, в частности, закон движения среды $x^j(t, \xi^\alpha)$, нижние индексы обозначают соотетствующие частные производные. К этому виду приводятся и лагранжианы, зависящие также от ряда функций вида $c_k(\xi^\alpha)$, $k = 1, \ldots, l < m$, которые могут быть отнесены к искомым $q^k(t, \xi^\alpha)$ с помощью преобразования Лежандра: $\partial\Lambda/\partial c_k = q^k_t$ с заменой Λ на $\tilde{\Lambda} = q^k_t c_k - \Lambda$ и исключением c_k.

Предположим, что функция Λ инвариантна, помимо группы сдвигов ξ^α, также относительно линейной группы SL_n, сохраняющей лагранжев объем, что характерно для жидкостей. Тогда

$$u^i_\beta \partial\Lambda/\partial u^i_\alpha = 1/n \cdot \delta^\alpha_\beta \, u^i_\gamma \partial\Lambda/\partial u^i_\gamma$$

*Работа выполненена при поддержке РФФИ (проект 99-01-01153).

и уравнения Эйлера $\delta\Lambda/\delta u^i = 0$ после свертки с u^i_α могут быть преобразованы к форме

$$\left(u^i_\alpha \partial\Lambda/\partial u^i_t\right)_t + \left(1/n \cdot u^i_\gamma \partial\Lambda/\partial u^i_\gamma - \Lambda\right)_\alpha = 0 \qquad (*)$$

Беря внешнюю производную по ξ^β от левой части уравнения $(*)$, получим искомый закон сохранения завихренности. В случае ее равенства нулю имеем потенциальность ковектора $u^i_\alpha \partial\Lambda/\partial u^i_t = \varphi_\alpha$ и уравнение $(*)$ дает интеграл Коши-Лагранжа. Аналогичные формулы могут быть получены и для теории с высшими производными.

Приведем два простых примера уравнения $(*)$, которое в этих случаях может быть получено и простыми преобразованиями. Для неоднородной несжимаемой жидкости с плотностью $\rho(\xi^\alpha)$, скоростью $v^i \equiv x^i_t$ и давлением $p \equiv q_t$, движущейся в силовом поле с потенциалом $U(t, x^i)$, имеем

$$\left(x^i_\alpha v_i - q(1/\rho)_\alpha\right)_t + \left(q_t/\rho - v^2/2 - U\right)_\alpha = 0$$

В случае адиабатического движения газа с удельной энтропией $s(\xi^\alpha)$, энтальпией $h(p, s)$ и температурой $T \equiv \partial h/\partial s \equiv q_t$ получим

$$\left(x^i_\alpha v_i - q\, s_\alpha\right)_t + \left(h - v^2/2 - U\right)_\alpha = 0$$

В качестве других приложений можно указать теорию идеальных ориентируемых и структурируемых жидкостей, намагничивающихся и поляризующихся жидкостей, квантовых жидкостей, гомогенных и гетерогенных смесей жидкостей или газов, причем как в ньютоновской механике, так и в теории относительности, специальной и общей.