УДК 519.6

ПРЯМО-ДВОЙСТВЕННАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ*

Е.Г. Гольштейн, Н.А. Соколов (ЦЭМИ РАН, Москва)

Рассмотрим задачу линейного программирования (л. п.) вида

$$c_1^T x + c_2^T u \to \max,\ A_{i1}x + A_{i2}u = b_i,\ i = 1, 2,\ x \geqslant 0,\ u \in G, \qquad (1)$$

где A_{ij} — матрица размера $m_i \times n_j$; $c_1, x \in E_{n_1}$; $c_2, u \in E_{n_2}$; $b_i \in E_{m_i}$, $G \subset E_{n_2}$ — многогранник, E_k — k-мерное евклидово пространство. Задача (1) имеет две векторные переменные: x и u, и две группы ограничений: $A_{i1}x + A_{i2}u = b_i$, $i = 1, 2$, связывающих x и u. Предполагается, что при фиксации переменной u и отбрасывании второй группы ограничений образуется задача л. п. относительно x простой структуры, так что при любых $\overline{c}_1 \in E_{n_1}$ и $\overline{b}_1 \in E_{m_1}$ задача л. п.

$$\overline{c}_1^T x \to \max,\ A_{11}x = \overline{b}_1,\ x \geqslant 0 \qquad (2)$$

допускает значительно более экономный способ анализа по сравнению с общей задачей л. п. тех же размеров.

В докладе предлагается декомпозиционный метод решения задачи (1), на каждом шаге которого анализируется задача (2) при некоторых $\overline{c}_1, \overline{b}_1$, определяемых по результатам предыдущих шагов.

Введем функцию $f(u, v)$, положив

$$f(u,v) = \max_{x \in G(u)} [c_1^T x + c_2^T u + v^T (b_2 - A_{21}x - A_{22}u)],$$
$$G(u) = \{x \in E_{n_1} :\ A_{11}x = b_1 - A_{12}u,\ x \geqslant 0\},\ u \in G,\ v \in E_{m_2}.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 99-01-01125

Очевидно, f — выпукло-вогнутая функция, $\operatorname{dom} f = \{(u,v)\colon G(u) \neq \varnothing,\ f(u,v) < \infty\}$. В любой точке $(u,v) \in \operatorname{dom} f$ значение f, ее субградиент по v и суперградиент по u определяются в результате анализа задачи (2) при $\overline{c}_1 = c_1 - A_{21}^T v$, $\overline{b}_1 = b_1 - A_{12} u$. Если же $(u,v) \in (G \times E_{m_2}) \setminus \operatorname{dom} f$, то анализ той же задачи позволяет построить гиперплоскость, разделяющую точку (u,v) и $\operatorname{dom} f$. Решение исходной задачи (1) сводится к отысканию седловой точки f на множестве $G \times Q(R)$, где $Q(R) = \{v \in E_{m_2}\colon \|v\| \leqslant R\}$, число R достаточно велико. В основе декомпозиционного подхода к решению задачи (1) лежит метод поиска седловой точки выпукло-вогнутой функции, множество эффективности которой погружено в многогранник [1].

На каждой итерации декомпозиционного метода производится анализ одной задачи л. п. типа (2), решаются одна вспомогательная задача л. п. с n_2+m_2+1 переменными и одна вспомогательная задача квадратичного программирования с n_2+m_2 переменными. Доказано, что в предположении непустоты внутренности множества $\operatorname{dom} f$ уклонение приближенного решения задачи (1), полученного за k итераций, от оптимального решения этой задачи по функционалу стремится к нулю со скоростью $O\left(k^{-1/2}\right)$. Проведенный численный эксперимент показал, что практическая скорость сходимости метода линейна.

Литература

1. *Бэр К., Гольштейн Е.Г., Соколов Н.А.* Метод отыскания седловой точки функции, область определения которой содержится в многограннике. // Экономика и матем. методы, 2001, Т. 37, Вып. 3.