Симплекс—метод

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:
Задача 1.

$$\max(c, x),$$
$$Ax = b, \tag{1}$$
$$x \geq 0$$

Здесь линейный оператор A действует из R_n в R_m, $c \in R_n$, $b \in R_m$. Считаем что $m < n$, и ранг матрицы A равен m.•

Предположим теперь, что допустимый элемент задачи x_0 доставляет ей решение, т.е., для любого $x \in R_n$, такого что $x \geq 0$, $Ax = b$ справедливо: $(c, x) \leq (c, x_0)$. Постараемся выяснить, что следует из такого предположения. Так как $x \geq 0$, то некоторые компоненты вектора x_0 нулевые, а некоторые – строго положительны. Пусть $x_0^{s_1}, ..., x_0^{s_k}$- строго положительные компоненты вектора x_0. Им соответствуют столбцы $\overrightarrow{a}_{s_1}, ..., \overrightarrow{a}_{s_k}$ матрицы A, такие что в силу (1),

$$\overrightarrow{a}_{s_1} x_0^{s_1} + ... + \overrightarrow{a}_{s_k} x_0^{s_k} = b. \tag{2}$$

Предположим, что эти столбцы $\overrightarrow{a}_{s_1}, ..., \overrightarrow{a}_{s_k}$ линейно зависимы. Тогда один из них, например, $\overrightarrow{a}_{s_j}$ можно выразить через остальные, т.е. найдутся числа χ_{s_i}, такие что $\overrightarrow{a}_{s_j} = \sum\limits_{i \neq j} \overrightarrow{a}_{s_i} \chi_{s_i}$. Числа χ_{s_i} можно трактовать как компоненты некоторого вектора $\bar{x}$, число ненулевых компонент которого на одну, (s_j), меньше чем число ненулевых компонент вектора x_0. Про знаки ненулевых компонент вектора $\bar{x}$ ничего определенного сказать нельзя. Тогда последнее равенство можно записать как $\overrightarrow{a}_{s_j} = A\bar{x}$. Подставим это равенство в (2). Тогда, если обозначить через $\tilde{x}$ вектор, отличающийся от x_0 лишь тем, что s_j-я его компонента нулевая, получаем: $A(\tilde{x} + \bar{x} x_0^{s_j}) = b$ и $A(\tilde{x} + x_0^{s_j} \bar{x} - x_0) = 0$. Положим $\hat{x} = x_0^{s_j} \bar{x}$, и еще определим s_j-ю компоненту $\hat{x}$ как $\hat{x}_{s_j} = -x_0^{s_j}$. Вектор $\hat{x}$ удовлетворяет уравнению $A\hat{x} = 0$, про знаки же его компонент нам ничего не известно. Однако, т.к., номера ненулевых компонент вектора те же что и номера строго положительных компонент вектора x_0, можно заключить, что при достаточно малых $\gamma > 0$, будет справедливо

$$x_0 + \gamma\hat{x} > 0, \quad x_0 - \gamma\hat{x} > 0, \quad A(x_0 + \gamma\hat{x}) = b, \quad A(x_0 - \gamma\hat{x}) = b. \tag{3}$$

Соотношение (3) означает, что точка x_0 лежит внутри отрезка прямой, концы которого $x_0 + \gamma\hat{x}$ и $x_0 - \gamma\hat{x}$ принадлежат области допустимых значений нашей задачи.

Отсюда и из нашего предположения об оптимальности вектора x_0, следует заключить, что векторы $\hat{x}$ и c ортогональны, т.к. в противном случае, выполнялось бы либо $(c, x_0 + \gamma\hat{x}) > (c, x_0)$, либо $(c, x_0 - \gamma\hat{x}) > (c, x_0)$.

Далее, вектор $\hat{x}$ имеет строго отрицательные компоненты (например, s_j-ю), компоненты же $x_0^{s_1}, ..., x_0^{s_k}$ вектора x_0 строго положительны, и номера нулевых компонент векторов x_0 и $\hat{x}$ совпадают. Выберем из отрицательных компонент вектора $\hat{x}$ ту или те, для которых отношение $-\frac{x_0^{s_i}}{\hat{x}_{s_i}}$ минимально. Положим

$$\bar{\gamma} = \min(-\frac{x_0^{s_i}}{\hat{x}_{s_i}}). \tag{4}$$

Тогда вектор $x_1 = x_0 + \bar{\gamma}\hat{x}$ обладает следующими свойствами:

1. Число ненулевых компонент вектора x_1 как минимум на одну меньше, чем число ненулевых компонент исходного вектора x_0, это следует из (4).

2. Это допустимый вектор, действительно, из (4) следует $x_1 \geq 0$, из (3) - $Ax_1 = b$.

3. Вектор $x_1 = x_0 + \bar{\gamma}\hat{x}$ также доставляет решение нашей задаче, т.к. векторы $\hat{x}$ и c ортогональны.

Так как число ненулевых компонент вектора x_1 меньше, чем число ненулевых компонент исходного вектора, возможно, соответствующие им столбцы матрицы A окажутся линейно независимыми. В противном случае, мы можем повторить наши рассуждения, взяв в качестве исходной, точку x_1. Поскольку при каждой итерации число ненулевых компонент получаемого вектора уменьшается, рано или поздно, мы получим вектор x_l, доставляющий максимум нашей задаче и такой, что столбцы матрицы A, соответствующие его ненулевым компонентам, линейно независимы.

Сформулируем теперь полученные результаты в виде следующих утверждений:

Лемма 1. Если задача 1 имеет решение, то найдется такое ее решение x_0, что столбцы матрицы A, соответствующие его ненулевым компонентам, будут линейно независимы.●

Лемма 2. Если x_0- допустимый элемент задачи 1, а столбцы матрицы A, соответствующие его ненулевым компонентам, линейно зависимы, то найдутся такие допустимые элементы задачи 1, x_1 и x_2, $x_1 \neq x_0 \neq x_2$, что точка x_0 лежит внутри отрезка с концами x_1 и x_2.•

Дадим теперь необходимые для дальнейших рассуждений определения.

Определение 1. Точка x_0 выпуклого множества M называется простой, если найдутся $x_1, x_2 \in M$, $x_1 \neq x_0 \neq x_2$ и $\alpha \in (0,1)$, такие что $x_0 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$.•

Определение 2. Точки выпуклого множества, не являющиеся простыми, называются вершинами этого выпуклого множества.•

Например, все точки треугольника, кроме трех вершин – простые; все точки круга, кроме лежащих на окружности – простые.

Теорема 1. Пусть допустимый элемент x_0 задачи 1 таков, что столбцы матрицы A, соответствующие его ненулевым компонентам, линейно независимы, тогда x_0- вершина области допустимых значений задачи.

Доказательство. Предположим противное. Пусть найдутся допустимые векторы $x_1 \neq x_0 \neq x_2$ и $\alpha \in (0,1)$, такие что

$$x_0 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2. \tag{5}$$

Из того что (5) выполняется покомпонентно, из $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ и $\alpha \in (0,1)$, заключаем, что у векторов x_1 и x_2 те компоненты, которые нулевые у x_0,- тоже нулевые. Далее, $Ax_1 = b$, $Ax_2 = b$, откуда $A(x_1 - x_2) = 0$, причем $x_1 - x_2 \neq 0$, но это означает линейную зависимость столбцов матрицы A, соответствующих ненулевым компонентам вектора x_0, что противоречит исходным предположениям. Полученное противоречие и доказывает теорему.•

Теорема 2. Пусть задача 1 имеет решение, тогда ее решение достигается также и в одной из вершин области ее допустимых значений.

Доказательство. Утверждение теоремы есть прямое следствие леммы 1 и теоремы 1.•

Замечание 1. Если в рассуждении, которое привело нас к доказательству леммы 1 и леммы 2, считать точку x_0 просто допустимой точкой задачи (т.е. не требовать ее оптимальности), можно заключить во-первых, что если множество допустимых значений задачи непусто, то и множество вершин области допустимых значений задачи также непусто. И, во-вторых, получить конструктивный способ достижения одной из вершин из любой допустимой точки задачи.•

Замечание 2. Отметим, что область допустимых значений задачи линейного программирования может, вообще говоря, быть шире множества выпуклых комбинаций ее вершин. Так, например, конус $x \geq 0$ имеет всего лишь одну вершину $x = 0$.•

Теорема 3. Пусть x_0- вершина области допустимых значений задачи 1, тогда столбцы матрицы A, соответствующие ненулевым компонентам x_0 линейно независимы.

Доказательство. Утверждение теоремы есть прямое следствие леммы 2.•

Пусть теперь x_0- одна из вершин области допустимых значений задачи 1. В силу теоремы 3, у вектора x_0 может быть не более m ненулевых компонент, и соответствующие им столбцы матрицы A линейно независимы. Чтобы не заслонять суть метода второстепенными деталями, будем предполагать, что любые m столбцов из расширенной матрицы $\|A, b\|$ линейно независимы, тогда вершина x_0 невырожденная, т.е. ненулевых компонент $x_0^{s_1}, ..., x_0^{s_m}$ ровно m, и соответствующие им столбцы $\overrightarrow{a}_{s_1}, ..., \overrightarrow{a}_{s_m}$ матрицы A образуют базис в R_m.

Вектор x_0 удовлетворяет уравнению (1). Как известно, любое решение уравнения (1) представимо в виде: $x = x_0 + y$, где $y \in N(A)$, $N(A)$-ядро оператора A, т.е., удовлетворяет уравнению $Ay = 0$. Ядро оператора A в нашем случае – это $n - m$-мерное подпространство пространства R_n. Найдем его базис. Пусть столбец $\overrightarrow{a}_l$ не входит в набор столбцов $\overrightarrow{a}_{s_1}, ..., \overrightarrow{a}_{s_m}$ матрицы A, соответствующих ненулевым компонентам x_0. Тогда его можно представить в виде линейной комбинации этих столбцов, т.е., найдется вектор $\bar{x}_l$, у которого нулевые все те компоненты, которые нулевые у x_0, такой что $\overrightarrow{a}_l = A\bar{x}_l$. Теперь каждому столбцу $\overrightarrow{a}_l$ матрицы A соответствующему одной из нулевых компонент x_0, поставим в соответствие вектор x_l с компонентами: $x_l^{s_i} = -\bar{x}_l^{s_i}, i = 1, ..., m$; $x_l^l = 1$; остальные $n - m - 1$ компонент векторов x_l- нулевые. Семейство векторов x_l обладает следующими свойствами:

1. Векторов x_l ровно $n - m$ штук, т.к. именно столько нулевых компонент у вектора x_0.

2. Векторы x_l линейно независимы, т.к. из $n - m$ компонент, соответствующих нулевым компонентам вектора x_0, у каждого из векторов

x_l ровно по одной ненулевой компоненте и все номера компонент различны.

3. Векторы x_l удовлетворяют уравнению $Ax_l = 0$, действительно, $Ax_l = \overrightarrow{a}_l - A\bar{x}_l = 0$.

Отсюда можно заключить, что система векторов $\{x_l\}$ есть базис подпространства $N(A) \subset R_n$ (ядра оператора A).

Заметим, что для любого $\gamma > 0$, и любого l, соответствующего одной из нулевых компонент x_0, вектор $x_0 - \gamma x_l$ не принадлежит ОДЗ задачи, т.к. его l-я компонента строго отрицательна. С другой стороны, при достаточно малых $\gamma > 0$, все векторы $x_0 + \gamma x_l$ принадлежат ОДЗ, т.к. компоненты $x_0^{s_1}, ..., x_0^{s_m}$ строго положительны.

Мы видим, что вершина x_0 является крайней точкой множества ОДЗ задачи в том смысле, что двигаться из нее по любому из базисных векторов подпространства, в котором лежит ОДЗ, не выходя из ОДЗ, можно лишь в одном направлении и нельзя в противоположном.

Предположим теперь, что точка x_0 не доставляет максимума нашей задаче. Тогда найдется допустимый элемент $\tilde{x}$, такой что $(c, \tilde{x}) > (c, x_0)$. Поскольку $\tilde{x}$ удовлетворяет (1), он представим в виде: $\tilde{x} = x_0 + \sum_l \alpha_l x_l$, причем из $\tilde{x} \geq 0$ и свойств базиса $\{x_l\}$ следует $\alpha_l \geq 0$. Тогда получаем: $(c, \tilde{x}) = (c, x_0) + \sum_l \alpha_l (c, x_l) > (c, x_0)$, или $\sum_l \alpha_l (c, x_l) > 0$. Отсюда следует, что хотя бы один член суммы должен быть строго положительным, т.е., найдется l, соответствующий одной из нулевых компонент x_0, такой что $(c, x_l) > 0$. Отсюда следует

Теорема 4. Пусть вершина x_0 не доставляет максимума задаче 1, Тогда найдется вектор x_l из базиса $\{x_l\}$ подпространства нулей матрицы A такой что $(c, x_l) > 0$, и при достаточно малых $\gamma > 0$ векторы $x_0 + \gamma x_l$ допустимы.•

Попробуем теперь сделать движение по одному из векторов базиса $\{x_l\}$ подпространства $N(A)$ и подсчитать, какое изменение значения функционала это принесет.

Имеем: $(c, x_0 + \gamma x_l) = (c, x_0) + \gamma(c_l - (c, \bar{x}_l))$, где, напомним, $\bar{x}_l$- это разложение столбца $\overrightarrow{a}_l$ по базису столбцов $\overrightarrow{a}_{s_1}, ..., \overrightarrow{a}_{s_m}$, соответствующих ненулевым компонентам x_0, т.е., ненулевых компонент у $\bar{x}_l$ не больше чем у x_0, и они имеют те же номера, и выполняется $\overrightarrow{a}_l = A\bar{x}_l$.

Мы видим, что направление изменения функционала зависит от знака величины $\Delta_l = (c, \bar{x}_l) - c_l$. Если $\Delta_l > 0$ - функционал убывает, если

$\Delta_l < 0$- возрастает, если $\Delta_l = 0$,- не меняется.

Мы пришли к следующему алгоритму решения задач линейного программирования.

Описание алгоритма симплекс-метода

1. Находясь в очередной вершине x_0 (как попасть в самую первую вершину из допустимой точки, ясно из замечания 1), перебираем не задействованные в базисе $\overrightarrow{a}_{s_1}, ..., \overrightarrow{a}_{s_m}$ соответствующем строго положительным компонентам x_0, столбцы $\overrightarrow{a}_l$ матрицы A, вычисляем их разложения $\bar{x}_l$ по базису $\overrightarrow{a}_{s_1}, ..., \overrightarrow{a}_{s_m}$, ($\overrightarrow{a}_l = A\bar{x}_l$) и ищем такое, что $\Delta_l = (c, \bar{x}_l) - c_l < 0$. Если такого не найдется, т.е., все $\Delta_l \geq 0$, то по теореме 4, наша вершина x_0- и есть решение задачи.

2. Если же нашелся столбец $\overrightarrow{a}_l$, такой что $\Delta_l < 0$, рассмотрим ненулевые компоненты вектора $\bar{x}_l$. Если все $\bar{x}_l^{s_i} \leq 0$, то при любом $\gamma > 0$ справедливо $x_0^{s_i} - \gamma\bar{x}_l^{s_i} \geq 0$, следовательно, функционал неограниченно возрастает на неограниченном множестве допустимых элементов задачи, и задача не имеет решения.

3. Если же есть строго положительные компоненты $\bar{x}_l^{s_i}$, выберем из них ту, для которой отношение $\dfrac{x_0^{s_i}}{x_l^{s_i}}$ минимально, и положим

   $\bar{\gamma} = \min \dfrac{x_0^{s_i}}{x_l^{s_i}}$, тогда в силу этого выбора, одна из компонент вектора x_1 с компонентами $x_1^l = \bar{\gamma}$, $x_1^{s_i} = x_0^{s_i} - \bar{\gamma}\bar{x}_l^{s_i}, i = 1, ..., m$, обратится в ноль. (Большее число компонент обратиться в ноль не может, в силу нашего предположения, что любые m столбцов расширенной матрицы $\|A, b\|$ линейно независимы, и равенства $Ax_1 = b$). Тогда вектор x_1 имеет ровно m ненулевых компонент, для него выполнено $Ax_1 = b, x_1 \geq 0$, и, стало быть он является вершиной области допустимых значений задачи. Таким образом, мы перешли в смежную вершину, увеличив при этом значение функционала задачи.

Так как число вершин конечно, повторяя приведенные выше действия для вершины x_1, затем x_2, и т.д., за конечное число шагов мы придем либо к случаю, когда все $\Delta_l \geq 0$, т.е., найдем решение задачи, либо, при $\Delta_l < 0$ окажется, что $\bar{x}_l \leq 0$, т.е., убедимся, что задача решений не имеет.•