

1 ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Мы будем рассматривать экстремальные задачи в конечномерных евклидовых пространствах, хотя все приведенные ниже формулировки и доказательства справедливы и для банаховых пространств с выпуклым телесным конусом.

Определение 1. Множество M линейного пространства X называется выпуклым, если для любых $x_1, x_2 \in M$ и $\alpha \in [0, 1]$ справедливо: $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in M$.•

Определение 2. Вектор-функцию $\Phi(x)$, определенную на выпуклом подмножестве линейного пространства R_n со значениями в линейном пространстве R_m , будем называть выпуклой, если для любых $\alpha \in [0, 1]$ и x_1, x_2 из области допустимых значений функции Φ справедливо:

$$\alpha\Phi(x_1) + (1 - \alpha)\Phi(x_2) \geq \Phi(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2).$$

(В случае банаховых пространств неравенства $x \geq 0$ понимаются как принадлежность конусу $x \in K$).•

В теории экстремальных задач важную роль играют теоремы отделимости. Здесь мы приведем без доказательства одну из них.

Теорема 1. Пусть M - выпуклое множество в R_n , имеющее внутреннюю точку (т.е., найдется точка $\bar{x}$, принадлежащая множеству M вместе с некоторой своей ε -окрестностью: из $\|x - \bar{x}\| < \varepsilon$ следует $x \in M$), и точка x_0 не принадлежит внутренности множества M . (Т.е., в любой окрестности точки x_0 найдется точка, не принадлежащая M .) Тогда найдется ненулевой линейный функционал $x^*, \|x^*\| > 0$, (в конечномерном пространстве R_n линейный функционал - это просто элемент R_n) отделяющий точку x_0 от множества M , т.е. такой, что для любого $x \in M$ справедливо: $(x^*, x) \geq (x^*, x_0)$.•

1.1 Задача выпуклого программирования

Пусть $\varphi(x)$ - определенная на R_n скалярная выпуклая функция, а выпуклая вектор-функция $\Phi(x)$ действует из R_n в R_m . Рассмотрим следующую задачу:

Задача 1.

$$\min \varphi(x),$$

$$\Phi(x) \leq 0.$$
•

Определение 3. Скажем, что ограничения задачи 1 удовлетворяют условию Слейтера, если найдется $\bar{x} \in R_n$ такой, что $\Phi(\bar{x}) < 0$. •

Теорема 2 (Куна-Таккера). Пусть ограничения задачи 1 удовлетворяют условию Слейтера, и x_0 - ее решение. Тогда найдется линейный функционал $v^* \geq 0$, определенный на R_m , такой что справедливо:

$$\varphi(x) + (v^*, \Phi(x)) \geq \varphi(x_0), \forall x \in R_n, \quad (1)$$

$$(v^*, \Phi(x_0)) = 0. \quad (2)$$

Равенство (2) часто называют условием дополняющей нежесткости.

Доказательство. Построим в R_{m+1} следующее множество M :

$$M = \{a \in R_1, v \in R_m : \exists x \in R_n; a \geq \varphi(x) - \varphi(x_0), v \geq \Phi(x)\}. \quad (3)$$

1. M – выпуклое множество. Действительно, пусть $a_1, v_1; a_2, v_2 \in M$, пусть x_1, x_2 - соответствующие им в силу (3) элементы R_n , пусть $\alpha \in [0, 1]$. Тогда

$$\begin{aligned} \alpha a_1 + (1 - \alpha)a_2 &\geq \alpha(\varphi(x_1) - \varphi(x_0)) + (1 - \alpha)(\varphi(x_2) - \varphi(x_0)) \geq \\ &\geq \varphi(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) - \varphi(x_0) \end{aligned}$$

и

$$\alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2 \geq \alpha \Phi(x_1) + (1 - \alpha)\Phi(x_2) \geq \Phi(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2),$$

следовательно, точка $\alpha a_1 + (1 - \alpha)a_2, \alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2$ также принадлежит M .

2. M имеет внутреннюю точку. Действительно, положим в (3) $x = x_0$, тогда точка $a = 0 = \varphi(x_0) - \varphi(x_0), v = 0 \geq \Phi(x_0)$ принадлежит множеству M . Следовательно, любая точка $a > 0, v > 0$ принадлежит множеству M с некоторой окрестностью.
3. Точка $a = 0, v = 0$ не является внутренней точкой множества M . Предположим противное, тогда в силу (3) найдется $\tilde{x} \in R_n$ такой что $0 > \varphi(\tilde{x}) - \varphi(x_0), \Phi(\tilde{x}) < 0$, а это противоречит исходному предположению теоремы о том, что x_0 - решение задачи 1.

Следовательно, к множеству M и точке $a = 0, v = 0$ применима теорема отделимости (Теорема 1), и найдется определенный на R_{m+1} линейный функционал a^*, v^* , причем

$$|a^*| + \|v^*\| > 0, \quad (4)$$

такой что

$$a^*a + (v^*, v) \geq 0, \forall a, v \in M. \quad (5)$$

Из (5) следует, что $a^* \geq 0, v^* \geq 0$. Действительно, пусть $a^* < 0$. Точка $\bar{a} = 1, \bar{v} = 0 \in M$, например, при $x = x_0$. Тогда $a^*\bar{a} + (v^*, \bar{v}) = a^* < 0$, что противоречит (5). Также при $x = x_0$, любая точка вида $a = 0, v \geq 0 \in M$. Следовательно $(v^*, v) \geq 0, \forall v \geq 0$, отсюда $v^* \geq 0$.

Из (3) следует, что для любого $x \in R_n$ точка $a = \varphi(x) - \varphi(x_0), v = \Phi(x)$ принадлежит M . Отсюда и из (5) следует:

$$a^*\varphi(x) - a^*\varphi(x_0) + (v^*, \Phi(x)) \geq 0, \forall x \in R_n. \quad (6)$$

Из условия Слейтера следует, что $a^* > 0$. Действительно, предположим противное, т.е., что $a^* = 0$, тогда из (4) следует $\|v^*\| > 0$. Отсюда, из $v^* \geq 0$ и из условия Слейтера следует $(v^*, \Phi(\tilde{x})) < 0$, что противоречит (6). Раз $a^* > 0$, мы можем разделить неравенство (6) на a^* и перенести свободный член в его правую часть, после чего и получаем искомое соотношение (1). Если в (1) положить $x = x_0$, получим $(v^*, \Phi(x_0)) \geq 0$. С другой стороны, из $\Phi(x_0) \leq 0$ и $v^* \geq 0$ заключаем: $(v^*, \Phi(x_0)) \leq 0$, что в совокупности и дает (2). Теорема доказана.●

Теорема 3. (Достаточные условия минимума) Пусть точка x_0 из области допустимых значений задачи 1 и линейный функционал $v^* \geq 0$, определенный на R_m таковы, что выполняется (1). Тогда x_0 - решение задачи 1.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\Phi(\tilde{x}) \leq 0$ и $\varphi(\tilde{x}) < \varphi(x_0)$. Тогда из $v^* \geq 0$ и $\Phi(\tilde{x}) \leq 0$ заключаем: $(v^*, \Phi(\tilde{x})) \leq 0$, отсюда тем более $\varphi(\tilde{x}) + (v^*, \Phi(\tilde{x})) < \varphi(x_0)$, что противоречит (1). Полученное противоречие и доказывает теорему.●

Определение 4. Функция $L(x, v) = \varphi(x) + (v, \Phi(x))$, где $x \in R_n; v \in R_m, v \geq 0$; а φ и Φ - выпуклые функции из постановки задачи 1, называется функцией Лагранжа задачи 1, а компоненты вектора v - множителями Лагранжа.●

Теорема 4. Точка x_0, v^* , где x_0 - решение задачи 1, а v^* - соответствующий ему линейный функционал, существующий в силу теоремы

Куна-Таккера, есть седловая точка функции Лагранжа, т.е. выполняется

$$L(x_0, v) \leq L(x_0, v^*) \leq L(x, v^*), \forall x \in R_n, v \in R_m, v \geq 0. \quad (7)$$

Доказательство. Прибавим к правой части неравенства (1) равную нулю левую часть равенства (2), получаем: $L(x, v^*) \geq L(x_0, v^*), \forall x \in R_n$. Пусть теперь $v \geq 0$. Из соотношений (2) и $\Phi(x_0) \leq 0$ заключаем: $(v^*, \Phi(x_0)) = 0 \geq (v, \Phi(x_0)), \forall v \geq 0, v \in R_m$, отсюда и $L(x_0, v^*) \geq L(x_0, v); \forall v \in R_m, v \geq 0$, что и завершает доказательство теоремы.●

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 5. Пусть точка x_0, v^* , где $x_0 \in R_n$, а $v^* \in R_m$ и $v^* \geq 0$, является седловой точкой функции Лагранжа задачи 1, т.е., для x_0, v^* выполняется соотношение (7). Тогда x_0 - решение задачи 1, а для вектора v^* выполняются соотношения (1) и (2).

Доказательство. Из левого неравенства соотношения (7) следует $(v, \Phi(x_0)) \leq (v^*, \Phi(x_0)) = \text{const}, \forall v \geq 0$. Последнее может быть справедливо лишь если $\Phi(x_0) \leq 0$. Действительно, если не выполняется $\Phi(x_0) \leq 0$, то найдется $\tilde{v} \in R_m, \tilde{v} \geq 0$ такой что $(\tilde{v}, \Phi(x_0)) > 0$, и, следовательно, неравенство $(v, \Phi(x_0)) \leq \text{const}, \forall v \geq 0$ не может быть справедливо например для $v = \alpha \tilde{v}, \alpha \in (0, \infty)$ при достаточно больших α . Полагая теперь $v = 0$ в соотношении $L(x_0, v^*) \geq L(x_0, v); \forall v \in R_m, v \geq 0$, получаем $(v^*, \Phi(x_0)) \geq 0$. Отсюда, и из неотрицательности v^* следует $(v^*, \Phi(x_0)) = 0$, т.е., выполняется уравнение дополняющей нежесткости (2). Подставляя (2) в соотношение $L(x, v^*) \geq L(x_0, v^*), \forall x \in R_n$, получаем (1). По теореме 3, соотношение (1) является достаточным условием экстремальности точки x_0 . Теорема доказана.●

1.2 Двойственность в задачах линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования в стандартной постановке.

Задача 2.

$$\begin{aligned} & \max_x (c, x), \\ & Ax \leq b, x \geq 0. \end{aligned}$$

Здесь $c, x \in R_n; b \in R_m; A$ - линейный оператор, действующий из R_n в R_m .●

Линейный функционал $-(c, x)$, аффинный оператор $Ax - b$, и линейный оператор $-Ex$, где E - единичный линейный оператор, действующий из R_n в R_n , являются выпуклыми, поэтому к задаче 2 можно применить результаты, полученные для выпуклых задач. Для этого перепишем задачу 2 в виде, соответствующем постановке задачи 1.

Задача 2а.

$$\begin{aligned} \min & -(c, x), \\ & Ax - b \leq 0, \\ & -x \leq 0. \bullet \end{aligned}$$

Условие Слейтера для задачи 2а будет состоять в существовании $\tilde{x} \in R_n$, такого что $A\tilde{x} - b < 0, -\tilde{x} < 0$.

Запишем для задачи 2а функцию Лагранжа:

$$L(x, v, y) = -(c, x) + (v, Ax - b) - (y, x); x, y \in R_n; v \in R_m; v \geq 0, y \geq 0. \quad (8)$$

Пусть для задачи 2а выполнено условие Слейтера и x_0 - ее решение, тогда из теорем предыдущего раздела следует, что найдутся $y^* \in R_n; v^* \in R_m; v^* \geq 0, y^* \geq 0$, такие что, x_0, v^*, y^* - седловая точка функции Лагранжа, т.е., для любых $x, y \in R_n; v \in R_m; v \geq 0, y \geq 0$ выполняется $L(x_0, v, y) \leq L(x_0, v^*, y^*) \leq L(x, v^*, y^*)$, или, умножая на -1 ,

$$\begin{aligned} (c, x_0) + (v, b - Ax_0) + (y, x_0) & \geq (c, x_0) + (v^*, b - Ax_0) + (y^*, x_0) \geq \\ & \geq (c, x) + (v^*, b - Ax) + (y^*, x). \end{aligned} \quad (9)$$

Положим в левой части (9) $v = 0, y = 0$, получаем $0 \geq (v^*, b - Ax_0) + (y^*, x_0)$. Но, как мы знаем, $v^* \geq 0, y^* \geq 0, x_0 \geq 0, b - Ax_0 \geq 0$, отсюда заключаем: $(v^*, Ax_0 - b) = 0; (y^*, x_0) = 0$. Положим теперь в (9) $y = 0, x \geq 0$, тогда справедливо:

$$\begin{aligned} (c, x_0) + (v, b - Ax_0) & \geq (c, x_0) + (v^*, b - Ax_0) \geq (c, x) + (v^*, b - Ax); \\ & \forall x \geq 0, v \geq 0, \end{aligned} \quad (10)$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned} (c - A^*v, x_0) + (v, b) & \geq (c - A^*v^*, x_0) + (v^*, b) \geq (c - A^*v^*, x) + (v^*, b); \\ & \forall x \geq 0, v \geq 0, \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь A^* - линейный оператор, сопряженный A . (В конечномерном случае это просто транспонированная матрица). Соотношения (10) и (11) означают, что x_0, v^* - седловая точка функции

$$L(x, v) = (c, x) + (v, b - Ax) = (c - A^*v, x) + (v, b), \quad (12)$$

определенной на множестве $x \in R_n; v \in R_m; v \geq 0, x \geq 0$.

Определение 5. Функцию (12) будем называть функцией Лагранжа стандартной задачи линейного программирования.●

Сформулируем теперь полученный результат в виде теоремы.

Теорема 6. Пусть x_0 - доставляет решение задаче 2, для которой выполнено условие Слейтера. Тогда найдется вектор $v^* \in R_m, v^* \geq 0$ такой, что точка x_0, v^* будет седловой точкой функции Лагранжа (12) стандартной задачи линейного программирования 2:

$$L(x_0, v) \geq L(x_0, v^*) \geq L(x, v^*), \forall x \in R_n, x \geq 0; v \in R_m, v \geq 0. \bullet$$

Пусть теперь, x_0, v^* - седловая точка функции Лагранжа (12) задачи 2.

Из левого неравенства соотношения (10) следует

$$(v, b - Ax_0) \geq (v^*, b - Ax_0) = \text{const}; \forall v \geq 0. \quad (13)$$

Соотношение (13) может выполняться лишь если $b - Ax_0 \geq 0$. Действительно, если не выполнено $b - Ax_0 \geq 0$, обязательно найдется вектор $\bar{v} \in R_m, \bar{v} \geq 0$, такой что $(\bar{v}, b - Ax_0) < 0$, отсюда следует, что скалярное произведение $(v, b - Ax_0)$ не ограничено снизу на множестве $v \geq 0$, и мы приходим к противоречию с (13). Следовательно, x_0 - допустимый элемент задачи 2. Далее, полагая в (13) $v = 0$, получаем $0 \geq (v^*, b - Ax_0)$, отсюда, из $b - Ax_0 \geq 0$ и $v^* \geq 0$ получаем соотношение дополняющей нежесткости:

$$(v^*, b - Ax_0) = 0. \quad (14)$$

Аналогично, из правого неравенства соотношения (11) следует:

$$(c - A^*v^*, x_0) = \text{const} \geq (c - A^*v^*, x), \forall x \geq 0,$$

откуда можно заключить:

$$c - A^*v^* \leq 0, \quad (15)$$

$$(c - A^*v^*, x_0) = 0. \quad (16)$$

Далее, из (12), (14) и (16) заключаем:

$$L(x_0, v^*) = (c, x_0) = (v^*, b). \quad (17)$$

Если $\tilde{x}$ - произвольный допустимый элемент задачи 2, т.е., $\tilde{x} \geq 0$; $A\tilde{x} \leq b$, из правого неравенства соотношения (10) заключаем:

$$L(x_0, v^*) = (c, x_0) \geq L(\tilde{x}, v^*) \geq (c, \tilde{x}),$$

т.е., x_0 доставляет решение задаче 2.

Аналогично, если $\tilde{v} \geq 0$ и $A^*\tilde{v} \geq c$, то из левого неравенства соотношения (11) заключаем:

$$(\tilde{v}, b) \geq L(x_0, \tilde{v}) \geq L(x_0, v^*) = (v^*, b),$$

т.е., v^* доставляет решение следующей задаче линейного программирования:

Задача 3.

$$\begin{aligned} \min_v (v, b), \\ A^*v \geq c; v \geq 0. \end{aligned}$$

Где $v, b \in R_m$; $c \in R_n$, векторы b и c те же самые, что и в задаче 2, а оператор A^* сопряжен оператору A задачи 2.●

Определение 6. Задача 3 называется **двойственной** или **сопряженной** по отношению к задаче 2. Исходную задачу по отношению к двойственной называют **прямой**.●

Отношение двойственности, связывающее задачу 2 и задачу 3, в конечномерных пространствах симметрично. В банаховых пространствах этой симметрии может и не быть, она имеет место лишь в так называемых рефлексивных банаховых пространствах. Попробуйте повторить выкладки этого раздела, взяв в качестве прямой задачу 3. В качестве двойственной получится задача 2.

Сформулируем полученные выше результаты в виде достаточного условия оптимальности для задач линейного программирования.

Теорема 7. Пусть функция Лагранжа (12) задач линейного программирования 2 и 3 имеет седловую точку x_0, v^* , такую что выполнено (10) или (11), тогда обе задачи 2 и 3 имеют решения, точка x_0 доставляет решение задаче 2, а точка v^* - решение задаче 3, причем выполняются условия дополняющей нежесткости (14) и (16).●

Приведем еще достаточные условия существования экстремума для задач линейного программирования.

Теорема 8. Пусть x_0, v^* - допустимые элементы задач 2 и 3 соответственно, такие что для них выполняются условия дополняющей нежесткости (14) и (16). Тогда точка x_0, v^* является седловой точкой функции Лагранжа (12).

Доказательство.

$$L(x_0, v^*) = (c - A^*v^*, x_0) + (v^*, b) = (v^*, b) \geq (c - A^*v^*, x) + (v^*, b);$$

$$\forall x \geq 0,$$

т.к. если v^* - допустимый элемент задачи 3, то $(c, x_0) + (v, b - Ax_0) \geq (c, x_0) = (c, x_0) + (v^*, b - Ax_0); \forall v \geq 0$, т.к. если x_0 - допустимый элемент задачи 2, то $(v, b - Ax_0) \geq 0; \forall v \geq 0$. И, наконец, $(c, x_0) = (v^*, b)$, что следует из определения функции Лагранжа (12) и выполнения условий дополняющей нежесткости (14) и (16).•

Теорема 9. Пусть x, v - допустимые элементы задач 2 и 3 соответственно, тогда $(c, x) \leq (v, b)$. Если же для допустимых x_0, v^* выполнено $(c, x_0) = (v^*, b)$, то x_0, v^* является седловой точкой функции Лагранжа (12).

Доказательство. Пусть x, v - допустимые элементы задач 2 и 3 соответственно. В функции Лагранжа $L(x, v) = (c, x) + (v, b - Ax) = (c - A^*v, x) + (v, b)$ всегда $(v, b - Ax) \geq 0$, а $(c - A^*v, x) \leq 0$, следовательно, для любых допустимых x, v справедливо $(c, x) \leq (v, b)$. Пусть теперь для допустимых x_0, v^* выполнено $(c, x_0) = (v^*, b)$.

Из

$$L(x_0, v^*) = (c, x_0) + (v^*, b - Ax_0) = (c - A^*v^*, x_0) + (v^*, b)$$

заключаем:

$$(v^*, b - Ax_0) = (c - A^*v^*, x_0),$$

но $(v^*, b - Ax_0) \geq 0$, а $(c - A^*v^*, x_0) \leq 0$, следовательно, выполняются соотношения дополняющей нежесткости (14) и (16), и по теореме 8, x_0, v^* - седловая точка функции Лагранжа (12).•

Следствие. Двойственные задачи линейного программирования либо обе имеют решения, либо обе решений не имеют. Если значение одной из задач неограниченно на множестве ее допустимых элементов, то у двойственной задачи не может быть допустимых элементов.•

1.3 Невыпуклые задачи

Пусть $\varphi(x)$ - определенная на R_n скалярная функция, а вектор-функция $\Phi(x)$ действует из R_n в R_m . Функции $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ будем считать дифференцируемыми в интересующих нас точках. Производные в точке x_0 будем обозначать как $\varphi_x(x_0)$ и $\Phi_x(x_0)$. Производная $\varphi_x(x_0)$ - n -мерный вектор, т.е., элемент R_n , а $\Phi_x(x_0)$ - линейный оператор, действующий из R_n в R_m , т.е. в конечномерном случае, матрица размера $n \times m$. Рассмотрим следующую задачу:

Задача 4.

$$\min \varphi(x),$$

$$\Phi(x) \leq 0. \bullet$$

Определение 7. Допустимая по ограничениям точка x_0 называется точкой локального минимума задачи 4, если найдется окрестность U точки x_0 такая, что из $x \in U$, $\Phi(x) \leq 0$ следует $\varphi(x) \geq \varphi(x_0)$. Если же выполняется строгое неравенство $\varphi(x) > \varphi(x_0)$, точка x_0 называется точкой строгого локального минимума. $\bullet$

Определение 8. Допустимая по ограничениям точка x_0 называется точкой глобального минимума задачи 4, если из $\Phi(x) \leq 0$ следует $\varphi(x) \geq \varphi(x_0)$. Если же выполняется строгое неравенство $\varphi(x) > \varphi(x_0)$, точка x_0 называется точкой строгого глобального минимума. $\bullet$

Определение 9. Функция $L(x, v) = \varphi(x) + (v, \Phi(x))$, где $x \in R_n$, а $v \in R_m, v \geq 0$, называется функцией Лагранжа задачи 4. $\bullet$

Согласно приведенным выше определениям, любая точка глобального минимума является также и точкой локального минимума. Обратное, для произвольной задачи, вообще говоря, не верно, хотя встречаются классы задач, для которых это так. Например, у задач линейного и выпуклого программирования, любая точка локального минимума является также и точкой глобального минимума. (**Почему?**).

Далее мы будем интересоваться условиями достижения в точке x_0 локального минимума задачи 4.

С задачей 4 будем связывать следующую линеаризованную в точке x_0 задачу

Задача 5.

$$\min(\varphi_x(x_0), x),$$

$$\Phi(x_0) + \Phi_x(x_0)x \leq 0. \bullet$$

Определение 10. Будем говорить, что ограничения задачи 4 в точке x_0 удовлетворяют условию Слейтера, если ограничения линеаризованной в этой точке задачи (задачи 5) удовлетворяют условию Слейтера определения 3. Такую точку x_0 будем называть невырожденной. •

Теорема 10. Пусть x_0 - точка локального минимума задачи 4, и ее ограничения в этой точке удовлетворяют условию Слейтера, тогда $x = 0$ - точка глобального минимума задачи 5.

Доказательство. Предположим, что x_0 - точка локального минимума задачи 4, но найдется $\tilde{x}$, такой что $\Phi(x_0) + \Phi_x(x_0)\tilde{x} \leq 0$ и $(\varphi_x(x_0), \tilde{x}) < 0$. Пусть $\bar{x}$ - вектор, на котором выполняется условие Слейтера для задачи 5, т.е., $\Phi(x_0) + \Phi_x(x_0)\bar{x} < 0$. Положим $x_\alpha = \alpha\bar{x} + (1 - \alpha)\tilde{x}$, $\alpha \in (0, 1)$. Тогда, в силу выпуклости аффинного оператора $\Phi(x_0) + \Phi_x(x_0)x$ для всех $\alpha \in (0, 1)$ справедливо $\Phi(x_0) + \Phi_x(x_0)x_\alpha < 0$, а в силу непрерывности линейного функционала $(\varphi_x(x_0), x)$, при достаточно малых $\alpha \in (0, 1)$ будет выполняться $(\varphi_x(x_0), x_\alpha) < 0$. Зафиксируем α . Рассмотрим луч $x_0 + \gamma x_\alpha$, $\gamma > 0$. На этом луче $\varphi(x_0 + \gamma x_\alpha) = \varphi(x_0) + \gamma(\varphi_x(x_0), x_\alpha) + o(\gamma)$ и $\Phi(x_0 + \gamma x_\alpha) = \Phi(x_0) + \gamma\Phi_x(x_0)x_\alpha + o(\gamma)$. Следовательно, для достаточно малых γ будет выполнено $\varphi(x_0 + \gamma x_\alpha) < \varphi(x_0)$ и $\Phi(x_0 + \gamma x_\alpha) < 0$, что противоречит тому, что x_0 - точка локального минимума задачи 4. Полученное противоречие и доказывает теорему. •

К задаче 5, как к задаче выпуклого программирования применимы все результаты соответствующего раздела, т.е., если 0 - решение этой задачи, то найдется вектор $v^* \in R_m$, $v^* \geq 0$, такой что будет выполнено:

$$(\varphi_x(x_0), x) + (v^*, \Phi(x_0) + \Phi_x(x_0)x) \geq 0, \forall x \in R_n. \quad (18)$$

Полагая в (18) $x = 0$, получаем $(v^*, \Phi(x_0)) \geq 0$, отсюда и из $v^* \geq 0$, $\Phi(x_0) \leq 0$ заключаем:

$$(v^*, \Phi(x_0)) = 0. \quad (19)$$

Мы получили условие дополняющей нежесткости.

Далее, из того что (18) справедливо для любого $x \in R_n$, учитывая (19), получаем:

$$\varphi_x(x_0) + \Phi_x^*(x_0)v^* = 0, \quad (20)$$

где $\Phi_x^*(x_0)$ - линейный оператор, сопряженный $\Phi_x(x_0)$, действующий из R_m в R_n .

Для задачи 5 естественно ввести функцию Лагранжа следующим образом:

$$\Lambda(x, v) = (\varphi_x(x_0), x) + (v, \Phi_x(x_0)x). \quad (21)$$

Из (18), (19) следует, что точка $x = 0, v^*$ есть седловая точка функции Лагранжа (21) задачи 5, т.е.,

$$\Lambda(0, v) \leq \Lambda(0, v^*) \leq \Lambda(x, v^*); \forall x \in R_n, v \in R_m, v \geq 0.$$

Далее, нетрудно заметить, что функция Лагранжа (21) линеаризованной задачи, есть производная в точке x_0 функции Лагранжа исходной задачи: $\Lambda(x, v) = L_x(x_0, v)(x)$.

Окончательно сформулируем, полученные результаты.

Теорема 11. (Необходимые условия локального минимума нелинейной задачи, или теорема Куна-Таккера для нелинейной задачи). Пусть x_0 - точка локального минимума задачи 4, и ее ограничения в этой точке удовлетворяют условию Слейтера, тогда найдется вектор $v^* \in R_m, v^* \geq 0$, такой что будет выполнено (19) и (20), а точка $x = 0, v^*$ будет седловой точкой производной в точке x_0 функции Лагранжа задачи 4 (21).•

Определение 11. Допустимую ограничениями задачи 4, невырожденную точку x_0 будем называть **стационарной**, если для нее найдется вектор множителей Лагранжа $v^* \in R_m, v^* \geq 0$, такой что будет выполнено (19),(20).•

1.4 Ограничения типа равенства

Рассмотрим вариант задачи 4, где вместо $\Phi(x) \leq 0$ требуется $\Theta(x) = 0$. В случае ограничений типа равенства, роль условия Слейтера, обеспечивающего содержательность результатов, играет условие Люстерника, которое состоит в следующем:

Определение 12. Для ограничений задачи $\min \varphi(x), \Theta(x) = 0$ в точке x_0 выполняется условие Люстерника, если линейный оператор $\Theta_x(x_0)$ отображает R_n на все R_m . (Т.е., в конечномерных пространствах, ранг матрицы $\Theta_x(x_0)$ равен m).•

Замечание. Невыполнение условия Слейтера или Люстерника в экстремальной задаче с ограничениями, содержательно означает, что множество допустимых значений задачи занимает не все m измерений пространства R_m , а целиком лежит в некотором его подпространстве. Тогда любой ортогональный этому подпространству вектор $v^* \in R_m$ отделяет это множество от любой точки R_m , и можно получить соотношение, формально имеющее вид (6) с $a^* = 0$, но содержательно отражающее лишь

факт нахождения ОДЗ задачи целиком в некотором подпространстве пространства R_m . Чтобы получить в этом случае содержательные результаты, нужно перенести рассмотрение задачи в это подпространство, или в подпространство еще меньшей размерности, если окажется, что и в данном подпространстве, ОДЗ лежит в некоторой его гиперплоскости.●

Для задачи с ограничениями типа равенства, справедливы результаты подобные полученным для задачи 4. При доказательстве теоремы, аналогичной теореме 10, существенно используется следующая

Теорема 12. (Люстерника) Пусть $\Theta(x_0) = 0$, пусть $\Theta_x(x_0)$ отображает R_n на все R_m и $\Theta_x(x_0)\bar{x} = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, найдется $x_\varepsilon = x_0 + \varepsilon\bar{x} + r(\varepsilon)$, такой что $\Theta(x_\varepsilon) = 0$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|r(\varepsilon)\|}{\varepsilon} = 0. \bullet$$

Приведем для задачи с ограничениями типа равенства необходимые условия локального минимума (аналог теоремы 11).

Теорема 13. (Теорема Куна-Таккера для нелинейной задачи с ограничениями типа равенства). Пусть x_0 - точка локального минимума задачи $\min \varphi(x)$, $\Theta(x) = 0$, и ее ограничения в этой точке удовлетворяют условию Люстерника, тогда найдется вектор $w^* \in R_m$, такой, что будет выполнено

$$\varphi_x(x_0) + \Theta_x^*(x_0)w^* = 0,$$

где $\Theta_x^*(x_0)$ - оператор, сопряженный $\Theta_x(x_0)$, действующий из R_m в R_n .●

Упражнение 1. Доказать теорему 13, используя теорему Люстерника.●

1.5 Условия локального экстремума высших порядков

Будем продолжать рассматривать задачу 4, в предположении, что в точке x_0 функции φ и Φ дифференцируемы нужное число раз, их k -е производные в точке x_0 будем обозначать через $\varphi_x^{(k)}(x_0)(x)$ и $\Phi_x^{(k)}(x_0)(x)$ (полилинейная функция $\Phi_x^{(k)}(x_0)(x)$ действует из $R_n \times \dots \times R_n$ в R_m), и ограничения задачи в точке x_0 удовлетворяют условию Слейтера.

Пусть x_0 - точка локального минимума задачи 4. Через V будем обозначать множество множителей Лагранжа задачи 4, т.е., множество

$v^* \in R_m$, $v^* \geq 0$, для которых выполнено (20). Теорема 11 гарантирует нам непустоту множества V .

Упражнение 2. Доказать замкнутость V . Используя выполнение условия Слейтера, доказать ограниченность V .•

Определение 13. Введем множества критических направлений K_j порядка j следующим образом:

$$K_0 = R_n, K_j = \left\{ x : x \in \bigcap_{i=0}^{j-1} K_i; \sum_{i=0}^j \frac{1}{i!} \Phi_x^{(i)}(x_0)(x) \leq 0; \varphi_x^{(j)}(x_0)(x) = 0 \right\}. \bullet$$

Приведем без доказательства необходимые и достаточные условия локального минимума высших порядков.

Теорема 14. (Необходимые условия локального экстремума) Пусть невырожденная точка x_0 есть точка локального минимума задачи 4, тогда для любого натурального j справедливо:

$$\max_{v \in V} L_x^{(j)}(x_0, v)(x) \geq 0, \forall x \in K_{j-1}, \quad (22)$$

где $L_x^{(j)}(x_0, v)(x)$ — j -я частная производная по x функции Лагранжа задачи 4 в точке x_0, v .•

Теорема 15. (Достаточные условия строгого локального экстремума. Теорема верна для конечномерных пространств). Пусть x_0 — допустимая точка задачи 4. Пусть при $1 \leq j < n$ выполнено (22) и найдется число $\gamma > 0$, такое что

$$\max_{v \in V} L_x^{(n)}(x_0, v)(x) \geq \gamma \|x\|^n, \forall x \in K_{n-1},$$

тогда точка x_0 доставляет строгий локальный минимум задаче 4.•