УДК 519.4

Номер проекта: 02-01-00250

Руководитель проекта: Павловский Юрий Николаевич

Название прооекта: Построение иерархических образов изображений методами геометрической теории декомпозиции.

Краткая аннотация.

Образ изображения трактовался как то, что в нем "сохраняется", когда оно подвергается некоторой совокуности преобразований. С изображением ассоциировался математический объект. Этот объект "погружался" в исчисление родов структур, где определено понятие об изоморфизме объектов. Образом изображения считалась иерархия сохраняемых при изоморфизмах декомпозиционных свойств ассоцированного с изображеним математического объекта, в частности, инвариантов изоморфизмов. Развита общая схема построения таких свойств. Эта схема конкретизирована для случая, когда ассоциированным математическим объектом является подмножество двумерного аффинного пространства. В этом случае разработан макет компьютерной системы формирования и распознавания сформированных образов изображений. Кроме того общая схема конкретизирована для случая, когда ассоциированным с изображением математическим объектом является отображение конечного множества в себя.

Abstract.

Pictures image was treated as something preserving as the picture is subject to a set of transpositions. Mathematical object was associated

with the picture. Pictures image was defined as hierarchy of preserving decomposition properties of the mathematical objects. Such properties building overall scheme was developed. These scheme was concretized for the case the associated mathematical object is subset of two-demensional affine space. In this case computer prototype of images forming and recognition system was developed. Also the scheme was concretized for the case the associated mathematical object is self-mapping of finite abstract set.

Развернутый научный отчет

1. *Введение.* Ребенку, который учится говорить, дают кубик и говорят: "Это - кубик". Через некоторое время ему дают другой кубик, из другого материала, по другому раскрашенный и другого размера. Ребенок говорит: "Это - кубик". Целью проекта было попытаться понять, как можно сделать компьютерную систему построения, накопления и распознавания образов изображений, имитирующую то, что имманентно присуще людям (возможно и другим животным). В основе компьютерной системы должен лежать алгоритм, который строит и запоминает нечто, что есть "образ" предъявленного системе изображения. При предъявлении некоторого изображения компьютерной системе она должна в соответствии с этим алгоритмом строить образ изображения. Далее система должна делать следующее:

- если построенного образа нет в памяти, то запрашивать его название и запоминать;
- если построенный образ уже имеется в памяти, то сообщать его название.

В основе подхода к построению компьтерной системы, о которой шла речь выше, лежали следующие рассуждения. Некто рассматривает карикатуру на всем известное лицо и узнает это лицо. Некто рассматривает другую карикатуру на это же лицо и также узнает его. Если считать карикатуру некоторым преобразованием "точного изображения", то факт унавания означает, что такие преобразования "сохраняют" нечто, содержащееся в точном изображении. Если ассоциировать с изображением математический объект, погрузить этот объект в класс объектов, где определено понятие об изоморфизме, то можно пытаться трактовать образы изображения как декомпозиционные свойства ассоциированного математического объекта, поскольку эти свойства "сохраняются", когда математический объект подвергается изоморфизмам.

2. *Геометрическая теория декомпозиции.*

Здесь имеется в виду подход к проблеме декомпозиции математических объектов, разрабатывавшийся в рамках проектов 'Декомпозиция математических моделей', выполнявшегося в 1993-1995 гг. (грант РФФИ 93-01-00615), 'Разработка геометрических и алгебраических методов декомпозиции нелинейных математических моделей', выполнявшегося в 1996-1998 гг. (грант РФФИ 96-01-00556) и "Исследование свойств и характеристик математических моделей, инвариантных при изоморфизмах", выполнявшегося в 1999-2001 гг. (грант РФФИ 99-01-00018)(основными публикациями, содержащими результаты выполнения проектов являются [2-13]). Этот подход состоит в погружении исследуемого математического объекта в класс объектов, где определено понятие об изоморфизме и среди объектов, изоморфных данному, отыскании такого, который есть "представление" исходного объекта с помощью семейства более "простых" объектов. Таким образом, если объект обладает некоторой декомпозицией, то точно такой же декомпозицией обладает всякий ему изоморфный объект. Именно это обстоятельство имеется в виду, когда утверждается, что декомпозиционные свойства "сохраняются при изоморфизмах".

В качестве инструментального средства при разработке геометрической теории декомпозиции использовался бурбаковский формализм. В рамках этого формализма, в частности, математический объект трактуется как базисное множество (несколько базисных множеств), снабженное (с помощью еще, может быть, нескольких вспомогательных множеств) структурой, т.е. несколькими подмножествами базисных множеств, и/или подмножествами множества их подмножеств и/или отношениями, т.е. подмножествами прямого произведения базисных и/или вспомогательных множеств и т.д. К структуре предъявляются некоторые требования, называемые аксиомой.

Примеры математических объектов, трактуемых как множества, снабженные структурой:

- Ориентированный граф есть пара (X, Q), где X — базисное множество, Q — структура на X, являющаяся бинарным отношением на X, т.е. $Q \subset X \times X$. В данном случае аксиома отсутствует. (Впрочем, когда говорят 'граф', то обычно подразумевают, что множество X конечно. Тогда это требование и есть аксиома.)

- Отношение эквивалентности есть пара (X, Q), где X — базисное множество, Q — структура на X, являющаяся бинарным отношением на X. В данном случае аксиомой является требование рефлексии, симметрии и транзитивности Q, т.е.

$$(x.x) \in Q; (x,y) \in Q \Rightarrow (y,x) \in Q; (x,y) \in Q \wedge (y,z) \in Q \Rightarrow (x,z) \in Q.$$

Здесь и далее x, y, z — произвольные элементы из X.

- Частичный порядок на X есть пара (X, Q), где Q — структура на X, являющаяся бинарным отношением на X. В данном случае аксиомой является требование рефлексии, антисимметрии и транзитивности Q, т.е.

$$(x.x) \in Q; (x,y) \in Q \wedge (y,x) \in Q \Rightarrow x = y;$$

$$(x,y) \in Q \wedge (y,z) \in Q \Rightarrow (x,z) \in Q.$$

- Отображение множества X в себя есть пара (X, F), где F — структура на X, являющаяся бинарным отношением на X и называемая графиком отображения. В данном случае аксиомой является соотношение

$$(\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists! x')((x, x') \in F),$$

утверждающая, что каждому x из X соответствует единственный x', являющийся образом x при отображении, определенном графиком F.

- Линейное векторное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, которое в данном случае является вспомогательным множеством, есть тройка (L, σ, ω), где L является базисным множеством, $\sigma \subset L \times L \times X$, $\qquad \omega \subset \mathbb{R} \times L \times L$. Тернарное отношение σ определяет на L алгебраическую коммутативную операцию с нейтральным элементом, относительно которого каждый элемент обратим $((x, y, z) \in \sigma \Leftrightarrow x + y = z)$, ω определяет умножение векторов из L на числа из $\mathbb{R}$ $((\alpha, x, y) \in \omega \Leftrightarrow \alpha x = y.)$, подчиненное соответствующим требованиям, составляющим часть аксиомы.

- Аффинное пространство над линейным векторным пространством есть пятерка $(X, L, \sigma, \omega, \mu)$, где X, L базисные множества, тройка (L, σ, ω) есть линейное векторное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, $\mu \subset X \times X \times L$ определяет разность элементов из X, подчиненную соответствующим требованиям.

Геометрическая теория декомпозиции основана на двух двойственных друг другу понятиях: понятии о P-декомпозиции и понятии о F-декомпозиции. Минуя строгие определения и упрощая, можно сказать, что P-декомпозиция некоторого математического объекта (E, τ) (E — базисное множество, τ — структура на этом множестве) — это семейство $(\widetilde{E}_i, \widetilde{\tau}_i)_{i \in I}$ подобъектов этого объекта, по которому он восстанавливается единственным образом. Другими словами, существует не более одной структуры τ на множестве E, для которой заданное семейство $(\widetilde{E}_i, \widetilde{\tau}_i)_{i \in I}$ является семейством подобъектов объекта (E, τ). F-декомпозиция математического объекта (E, τ) — это семейство $(\overline{E}_i, \overline{\tau}_i)_{i \in I}$ фактор-объектов объекта (E, τ), по которому он восстанавливается единственным образом.

Декомпозиционная структура объекта — это ‘взаимоотношения’ на множестве его P-декомпозиций (F-декомпозиций). В частности бинарное отношение ‘более простая’ на множестве P-декомпозиций (F-декомпозиций) определено следующим образом: пусть $(\widetilde{E}_i, \widetilde{\tau}_i)_{i\in I}$ — P-декомпозиция для (E, τ). Если из семейства $(\widetilde{E}_i, \widetilde{\tau}_i)_{i\in I}$ можно удалить некоторые элементы так, что оставшееся семейство будет по-прежнему P-декомпозицией объекта (E, τ), то это последнее семейство по определению является ‘более простым’, чем исходное. Аналогично определяется отношение ‘более простая’ на множестве F-декомпозиций. Отношение ‘более простая’ является отношением частичного порядка. Интерес представляют минимальные относительно этого частичного порядка (далее — просто минимальные) декомпозиции. Среди минимальных P-декомпозиций особенно интересны декомпозиции на дизъюнктивную сумму или CC-декомпозиции: P-декомпозиция $(\widetilde{E}_i, \widetilde{\tau}_i)_{i\in I}$ объекта (E, τ) является по определению его CC-декомпозицией, если семейство $(\widetilde{E}_i)_{i\in I}$ является классами по некоторому отношению эквивалентности Q, которое называется CC-декомпозирующим. Интуитивно, существование (нетривиальной) CC-декомпозиции объекта означает, что объект ‘распадается’ на ‘независимые’ подобъекты, из которых он состаляется ‘как из кубиков’. (Двойственной к CC-декомпозиции является декомпозиция объекта на декартово произведение своих фактор - объектов или DP-декомпозиция. Например, жорданово представление линейного оператора, действующего в конечномерном линейном векторном пространстве над полем комплексных чисел, является максимальной DPдекомпозицией этого опрератора.)

3. Построение иерархической системы образов изображений при сопоставлении с изображением отображения в себя.

В рамках проекта с изображением ассоциировались математические объекты двух типов: отображение конечного абстрактного (т.е. не снабженного никакой структурой) множества в себя и подмножество двумерного аффинного пространства. Начнем с описания способа построения иерархической системы образов изображений в случае, когда с изображением ассоциировалось отображение конечного множества в себя.

Ассоциировать с изображением отображение некоторого множества в себя можно многими способами. Приведем один из них. Изображением будем считать отображение множества из N' "пикселей" в множество $\{0,1\}$. Пусть K — наибольшее целое натуральное число, удовлетворяющее соотношению $K \cdot 2^K \leq N'$. Обозначим $K \cdot 2^K = N$. Пиксели в количестве $N' - N$ будем считать "лишними". Какие именно пиксели считаются лишними является "параметр метода". (Здесь и далее то, на что указывается как на "параметры метода", подлежит конкретизации средствами, которые в данной статье не рассматриваются. Например, они могут конкретизироваться в рамках компьютерной реализации предлагаемого метода путем диалога пользователя с компьютером.) Перенумеруем оставшиеся пиксели числами $\{1, 2, ..., N\}$. Разобьем множество из N оставшихся пикселей на множество X из 2^K кластеров по K пикселей в каждом кластере и перенумеруем кластеры числами $\{1, 2, ..., 2^K\}$. Способ разбиения и нумерации являются "параметрами метода" (см. выше). Поскольку каждому пикселю в кластере соответствует элемент множества $\{0, 1\}$, то можно считать, что каждый кластер "представляет" K - разрядное двоичное число. Тем самым возникает отображение $f : X \to X$ множества X кластеров в себя: номеру кластера $m, m = 1, 2, ..., 2^K$, соответствует число $f(m)$, представляемое кластером. Формулируемые ниже определения и утверждения, касающиеся декомпозиционных свойств отображений в себя, является в большой мере конкретизацией для этого рода структуры некоторых общих положений геометрической теории декомпозиции [2]. Однако, для удобства читателей эти общие положения в дальнейшем тексте не используются. Кроме того, некоторые из этих определений и утверждений можно сформулировать на языке теории графов [14] [15] [16].

Через $\mathbb{N}$ обозначается множество натуральных целых чисел, через $\widetilde{X}$ обозначется часть множества X, через $Card(X)$ - мощность X, через Q — отношение эквивалентности на X, через x_Q — класс эквивалентности по Q, которому принадлежит x, через X_Q — соответствующее фактор-множество. Пусть $f : X \to X$ — отображение. $\widetilde{X}$ называется P-множеством для f (относительно естественных канонических морфизмов [2]), если $f(\widetilde{X}) \subset \widetilde{X}$. Через $\widetilde{f}_{\widetilde{X}} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ обозначается P-объект объекта f на P-множестве $\widetilde{X}$, т.е. функция, индуцированная f на $\widetilde{X}$ [2]. Будем говорить, что отображение f допускает декомпозицию на дизъюнктивную сумму, если существует отношение эквивалентности Q, такое, что для любого x класс x_Q является P-множеством. Это отношение эквивалентности называется CC-декомпозирующим для f. Для того, чтобы Q было СС-декомпозирующим для f, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $x \in X$ выполнялось условие $(x, f(x)) \in Q$. Отсюда следует, что пересечение СС-декомпозирующих отношений для f является СС-декомпозирующим для f и, значит, существует минимальное СС-декомпозирующее для f отношение Q_{min}. Имеет место соотношение $x_{Q_{min}} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}} f^{-l}(f^k(x))$. Если $Q_{min} = X \times X$, то f называется СС-простым отображением. Р-объекты $\widetilde{f}_{x_{Q_{min}}}$ являются СС-простыми для всякого x.

Пусть $x \in X$. Обозначим $f^0(x) = x, f^1(x) = f(x), f^2(x) = f(f(x)), ..., f^{k+1}(x) = f(f^k(x)), ...$ Последовательность $(f^i(x))_{i=0,1,2,...}$ будем называть "(дискретным) динамическим процессом, ассоциированным с f и начинающимся в x" или просто "динамическим процессом", если ясно или несущественно каковы f и x.

Пусть мощность X — конечна и $f : X \to X$ — СС-простое отображение. Пусть $(f^i(x))_{i=0,1,2,...}$ — динамический процесс. Поскольку X конечно, то существуют натуральные целые k, p, такие, что $f^k(x) = f^{k+p}(x)$. Множество $A_f = \{f^k(x), f^{k+1}(x), ..., f^{k+p-1}(x)\}$ назовем "аттрактором динамического процесса $(f^i(x))_{i=0,1,2,...}$". Очевидно,что аттрактор СС-простого отображения не зависит от начальной точки x динамического процесса, является Р-множеством для f, а соответствующий Р-объект является циклической подстановкой. Другими словами у СС-простого отображения аттрактор единственен и динамический процесс, начинающийся в любой точке $x \in X$ "выходит в некоторый момент" на атрактор A_f и начиная с этого момента "крутится по аттрактору".

Пусть $f : X \to X$ — произвольное отображение конечного множества в себя. Для того, чтобы не загромождать формулы многоуровневой индексацией будем обозначать минимальное СС-декомпозирующее отношение для f просто через Q, фактор-множество по нему — через X_Q, класс эквивалентности по Q, содержащий x — через x_Q, аттрактор, содержащийся в x_Q — через $A(x_Q)$. Вводимые далее характеристики, описывающие декомпозиционную структуру отображений конечных множеств в себя и трактуемые как их "образы" , являются иерархической системой инвариантов изоморфизмов этих отображений.

Назовем образом первого уровня отображения f число $n = Card(X_Q)$, т.е. число СС-простых Р-объектов в его максимальной СС-декомпозиции. Множество

$$B = \{k \mid k \in \mathbb{N} \wedge \exists (x_Q \in X_Q)(Card(x_Q) = k)\},$$

естественным образом снабжается линейным порядком. Пусть $m = Card(B), b_j \in B, j = 1, 2, ..., m, b_1 < b_2 < ... < b_m$. Обозначим $\widetilde{X}_{Qj} = \{x_Q \mid Card(x_Q) = b_j\}, p_j = Card(\widetilde{X}_{Qj})$. Семейство $(b_j, p_j)_{j=1,2,...,m}$ назовем образом второго уровня отображения f.

Пусть $1 \leq j \leq m$. Множество

$$C_j = \{q \mid q \in \mathbb{N} \wedge \exists (x_Q \in \widetilde{X}_{Qj})(Card(A(x_Q)) = q)\}.$$

естественным образом снабжается линейным порядком. Пусть $s_j = Card(C_j), c_{jq} \in C_j, q = 1, 2, ..., s_j, c_{j1} < c_{j2} < ... < c_{js_j}, j = 1, 2, ..., m$. Обозначим $\widetilde{X}_{Qjq} = \{x_Q \mid Card(x_Q) = b_j \wedge Card(A_{x_Q}) = q\}, r_{jq} = Card(\widetilde{X}_{Qjq})$. Семейство $(c_{jq}, r_{jq})_{j=1,2,...,m,q=1,2,...,s_j}$ назовем образом третьего уровня отображения f.

Пусть $x_Q \in \widetilde{X}_{Qjq}, a \in A(x_Q)$, $t(a) = 0$, если $Card(f^{-1}(a)) - 1 = 0$ и $t(a) = 1$ в противном случае. Сопоставим с a двоичное q - разрядное число

$$u(a) = t(a)t(f(a))t(f^2(a))...t(f^{q-1}(a)).$$

Назовем характеристикой аттрактора $A(x_Q)$ число

$$z(A(x_Q)) = \min_{a \in A_{x_Q}} u(a).$$

Пусть $1 \le j \le m, 1 \le q \le s_j$. Множество

$$D_{jq} = \{i \mid i \in \mathbb{N} \wedge \exists(x_Q \in \widetilde{X}_{Qjq})(z(A(x_Q)) = i)\}.$$

естественным образом снабжается линейным порядком. Пусть $v_{jq} = Card(D_{jq}), d_{jql} \in D_{jq}, l = 1, 2, ..., v_{jq}, d_{jq1} < d_{jq2} < ... < q_{jqv_{jq}}, q = 1, 2, ..., s_j, j = 1, 2, ..., m$. Обозначим $\widetilde{X}_{Qjql} = \{x_Q \mid Card(x_Q) = b_j \wedge Card(A_{x_Q}) = q \wedge z(A_{x_Q}) = l\}, w_{jql} = Card(\widetilde{X}_{Qjql})$. Семейство $(d_{jql}, w_{jql})_{j=1,2,...,m, q=1,2,...,s_j, l=1,2,...,v_{jq}}$ назовем образом четвертого уровня отображения f.

Аналогично строятся следующие уровни образа отображения f, а, значит, изображения, с которым f ассоциировано. Комплекс компьютерных программ, реализующий предлагаемый метод, хранит в своей базе данных иерархические образы ранее предъявленных ему изображений и названия этих образов. При предъявлении комплексу нового изображения он предлагает пользователю конкретизировать "параметры метода", вычисляет иерархическую систему его инвариантов и, если таковая уже имеется в базе данных, сообщает пользователю соответствующие названия. Если же такой системы инвариантов (начиная с некоторого уровня) не имеется, то эта система записывается в базу данных комплекса с соответствующими названиями, которые запрашиваются у пользователя.

4. Построение иерархической системы образов изображений при сопоставлении с изображением подмножества аффинного пространства.

В этом случае оказалось необходимым развить специальный вариант теории декомпозиции. Дело в том, что само аффинное пространство, подмножество которого трактуется как изображение, не нужно подвергать декомпозиции. Нужно подвергать декомпозиции его подмножество. Минуя точные определения, конструкции и утверждения, можно сказать, что P-декомпозицией подмножества U двумерного аффинного пространства $(X, L, \sigma, \omega, \mu)$ (см. выше раздел 'Геометрическая теория декомпозиции') является семейство $(X_i, L_i, \sigma_i, \omega_i, \mu_i)_{i \in I}$ одномерных подобъектов пространства $(X, L, \sigma, \omega, \mu)$, т.е. прямых, содержащих все точки множества U. Другими словами, если семество прямых $(X_i, L_i, \sigma_i, \omega_i, \mu_i)_{i \in I}$ является P-декомпозицией для подмножества U аффинного пространства $(X, L, \sigma, \omega, \mu)$, то имеет место $\bigcup_{i \in I} U_i = U$, где $U_i = U \bigcap X_i$. Мощность множества элементов в декомпозиции $(X_i, L_i, \sigma_i, \omega_i, \mu_i)_{i \in I}$ называется мощностью этой декомпозиции.

С практической точки зрения естественно считать, что множество U конечно: при компьютерной реализации метода изображение 'оцифровывается' с характеризующей разрешение при оцифровке величиной, являющейся параметром метода. Естественно интересоваться P-декомпозициями, имеющими минимальную мощность, являющимися минимальными P-декомпозициями относительно частичного порядка, индуцируемого отношением 'более простая' (см. выше).

Дальнейшие построения поясним на конкретных примерах. Пусть минимальная мощность различных Р-декомпозиций некоторого изображения U равна 2. Число 2 тогда является (аффинным) инвариантом изображения U. Это число называется (аффинным) образом первого уровня изображения U. Пусть p_1 и p_2 — две какие-либо прямые, которым принадлежат все точки изображения U. (Возможно, существуют две прямые, отличные от прямых p_1 и p_2, которым также принадлежат все точки изображения. В этом случае изображение U имеет два различных образа.) Если эти прямые не имеют общей точки в 'поле зрения' метода (мы аппелируем к интуиции читателя и не входим в обсуждение интуитивно прозрачного, но технически сложного понятия 'поле зрения'), то построение образа на этом заканчиваются и естественным названием для образа данного изображения является 'непересекающиеся прямые'. Если точка x пересечения прямых имеется, то она определяется и далее анализируется расположение точек множества U на прямых p_1 и p_2 относительно x: структура двумерного аффинного пространства индуцирует на каждом своем одномерном подобъекте, т.е. на каждой прямой, структуру, изоморфную $\mathbb{R}$, в частности — линейный порядок и, значит, тернарное отношение 'точка y лежит между точками x и z'. Это тернарное отношение 'сохраняется' при аффинных изоморфизмах. Имеется три возможности, характеризующие сохраняющиеся при аффинных изоморфизмах свойств предъявленного изображения:

- На обеих прямых p_1 и p_2 точки множества U лежат по обе стороны от x. В этом случае (аффинным) образом предъявленного изображения естественно считать букву X.

- На одной из прямых точки множества U лежат по обе стороны от x, а на другой — по одну сторону. В этом случае аффинным образом предъявленного изображения естественно считать букву Y (или знак $\top$ или знак $\perp$) и т.д.

- На обеих прямых p_1 и p_2 точки множества U лежат по одну сторону от x. В этом случае аффинным образом предъявленного изображения естественно считать букву L или знак $\neg$ или знак $\angle$ и т.д.

Таким образом декомпозиционные свойства изображения U в рассматриваемом случае — это взаимное расположение минимального количества прямых, содержащих все точки U, точек пересеченния этих прямых и взаимного расположения точек множества U на прямых относительно точек пересечения прямых.

В данном случае разработан компьютерный макет, который 'умеет' формировать и узнавать образы простейших букв и фигур на плоскости [17] .

5. Заключение

Авторы считают, что принципиальная возможность построения системы формирования, накопления и распознавания образов изображений с использованием средств геометрической теории декомпозиции установлена, тем самым фундаментальная часть проблемы, которую ставили перед собой авторы, решена, и, таким образом, проект завершен.

Для того, чтобы на основе результатов, полученных в ходе выполнения проекта, получить прикладную систему формирования, накопления и узнавания образов изображений, необходимо финансирование, по крайней мере, на порядок превышающее средства, израсходованные в ходе выполнения проекта. Авторы проекта представляют в рамках настоящего отчета форму 511. Что касается случая, когда с изображеним ассоциировалось отображение конечного абстрактного множества в себя, то соответствующий компьютерный макет в рамках проекта не был разработан. Однако, такая разработка и не планировалась, как и сам способ формирования и узнавания образов избражений, соответствующий этому случаю. Этот способ возник в ходе выполнения проекта. Для попытки его прикладной реализации также необходимо значительное финансирование.

Литература

1. *Бурбаки Н.* Теория множеств. М.:Мир.1965.456 с.

2. *Павловский Ю.Н., Смирнова Т.Г.* Проблема декомпозиции в математическом моделировании.М.:Фазис.1998.266 с.

3. *Павловский Ю.Н.*//Декомпозиция снабженных структурой множеств на свободную сумму и прямое произведение. ДАН.1995.Т.340.3.С.314-316.

4. *Павловский Ю.Н.*//О P- и F-декомпозициях Σ-объектов. ДАН.1996.Т.351. 5.С.603-605.

5. *Павловский Ю.Н.*//О декомпозициях снабженных структурой множеств над подчиненными структурами.ДАН.1997.Т.357. 5.С.589-551.

6. *Павловский Ю.Н.*//О шкалах родов структур.ДАН.1998.Т.363.2.С.163-165.

7. *Павловский Ю.Н.*//О HPF- и PF- морфизмах. ДАН.1999.Т.369.6.С.745-746.

8. *Павловский Ю.Н.*//О декомпозиционном методе построения образов подмножеств снабженных структурой множеств.ДАН.2000.Т.374.4.С.450-452.

9. *Павловский Ю.Н.*//Об одном декомпозиционном подходе к построению образов изображений.ДАН.2003.Т.392.6.С.733-735.

10. *Данилов Н.Ю.*//О взаимосвязи декомпозиционных свойств исчисления родов структур и теории категорий. В кн. Моделирование, оптимизация и декомпозиция сложных динамических процессов.М.:ВЦ РАН.1996.Стр.49-62.

11. *Елкин В.И.*// Редукция нелинейных управляемых систем. Дифференциально-геометрический подход. М.:Наука.1997.317 с.

12. *Елкин В.И.*// Редукция нелинейных управляемых систем. Декомпозиция и инвариантность по возмущениям. М.:Фазис.2003.207 с.

13. *Павловский Ю.Н., Смирнова Т.Г.* Шкалы родов структур, термы и соотношения, сохраняющиеся при изоморфизмах.М.:ВЦ РАН.2003.92 с.

14. *Зыков А.А.*//Основы теории графов. М.: Наука. 1987. 382 с.

15. *Оре О.*//Теория графов. М.Наука.1980. 336 с.

16. *Ахо А., Ульман Дж.*//Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции. Том 1. Синтаксический анализ. М.: Мир. 614 с.

17. *Иванов В.В.*В кн. Моделирование, оптимизация и декомпозиция сложных динамических процессов. Об одном алгоритме построения образом изображений. М.:ВЦ РАН.2002.Стр.52-57.